

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนสองมิติ

นางสาวณัฏฐา จันโศ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2555

**DEVELOPMENT OF COMPUTER PROGRAM
FOR TWO-DIMENSIONAL COMPLEX
GEOMETRY FLOWS**

Natta Chunso

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering**

Suranaree University of Technology

Academic Year 2012

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนสองมิติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

(ผศ. ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล)

ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.กীরติ สุลักษณ์)

กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

(ผศ. ดร.เผด็จ เผ่าละออ)

กรรมการ

(ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)

คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

ณัฐฐา จันโศ : การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลผ่านรูปทรงซับซ้อน
สองมิติ (DEVELOPMENT OF COMPUTER PROGRAM FOR TWO-DIMENSIONAL
COMPLEX GEOMETRY FLOWS) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กิริติ
สุลักษณ์, 90 หน้า.

งานวิจัยนี้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณการไหลแบบราบเรียบในสภาวะคงตัวที่
อัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติบนพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มและกริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยม
การประมาณค่าพจน์ การพาและพจน์การแพร่ในสมการควบคุม ใช้วิธีผลต่างต้นลม และวิธีผลต่าง
กลางตามลำดับ ขั้นตอนวิธี SIMPLE ถูกใช้ในการแก้ระบบสมการควบคุมการไหลที่ประกอบด้วย
สมการ ทรง โมเมนตัมและสมการ ความต่อเนื่อง ในรูปของสมการความดันค่าแก้ไข โปรแกรมถูก
ประเมินความน่าเชื่อถือโดยนำไปทดสอบกับปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยม การไหลระหว่างแผ่น
ระนาบคู่ขนาน การไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที การไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยวและการไหลผ่านกลุ่ม
ทรงกระบอก วางเอียง ผลการคำนวณที่ได้ ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent และผล
เฉลยแม่นยำตรง



NATTA CHUNSO : DEVELOPMENT OF COMPUTER PROGRAM

FOR TWO-DIMENSIONAL COMPLEX GEOMETRY FLOWS.

THESIS ADVISOR : ASST. PROF. KEERATI SULUKSNA, Ph.D., 90 PP.

COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS/FINITE VOLUME METHOD/
TRIANGULAR UNSTRUCTURED MESH/COMPLEX GEOMETRY

This research developed the CFD computer program for predicting of two-dimensional laminar steady and incompressible flow based on finite volume method and triangular unstructured mesh. The upwind and the central differencing schemes have been used to approximate the convection and the diffusion terms of the governing equations, respectively. The governing equations of flow, the momentum equations and the continuity equation in form of the pressure correction equation, have been solved by using SIMPLE algorithm. The developed computer program has been validated by investigating on five cases of flow problems, i.e., a cavity flow, two parallel plates flow, backward facing step flow, flow around a cylinder, and flow around the staggered cylinders. The computed results have been compared with the results of Fluent and exact solutions.

School of Mechanical Engineering

Academic Year 2012

Student's Signature _____

Advisor's Signature _____

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์ทุกประการ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบุคคลต่าง ๆ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ และช่วยเหลืออย่างดียิ่ง ทั้งด้านวิชาการ และด้านการดำเนินงานวิจัย ดังนี้

ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ (MTEC) ที่ให้ทุนสนับสนุนในการทำงานวิจัยนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กิริติ สุกฤษณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความรู้และคำปรึกษาแนะนำในการทำงานวิจัย รวมทั้งให้คำแนะนำในการดำเนินชีวิต และให้กำลังใจด้วยความเมตตาโดยตลอด และขอขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่งที่อาจารย์ได้ให้ โอกาสในการปรับความคิดและปรับปรุงตัวเสมอมาจนเกิดผลสำเร็จในปัจจุบันนี้

รองศาสตราจารย์ เรืออากาศเอก ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์ คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ และคณาจารย์ทุกท่าน ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ด้วยความเมตตากรุณา

รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์ ที่คอยสอนเรื่องสติ สมาธิ และความเชื่อมั่นในตัวเองเพื่อก้าวไปสู่ความสำเร็จในชีวิต

คุณจริยาพร ศรีวิไลลักษณ์ และคุณอาภรณ์พรรณ ศรีอักษรวิทยา เจ้าหน้าที่ประจำสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ ที่อำนวยความสะดวกในด้านธุรการต่าง ๆ

สมาชิกกลุ่มวิจัยในที่ปรึกษาอาจารย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กิริติ สุกฤษณ์ และ คุณทวิโชค นานาใจติก ที่คอยช่วยเหลือและให้กำลังใจกันและกัน

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ผู้วิจัยขอมอบให้กับบิดามารดา คุณพ่อสมักร – คุณแม่สุมาลี จันโส ซึ่งเป็นที่รักและเคารพที่สุดในชีวิตของผู้วิจัย

ณัฐฐา จันโส

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย)	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ)	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญรูปภาพ	ซ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	ฎ
บทที่	
1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย	3
1.3 ขอบเขตการวิจัย	3
1.4 วิธีดำเนินการศึกษาวิจัย	4
1.5 สถานที่ทำงานวิจัย	5
1.6 เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย	5
1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
2 ทัศนั้วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
2.1 ส่วนก่อนการประมวลผล	7
2.1.1 ลักษณะของกริด	8
2.1.2 ระบบการจัดวางกริด (Grid Arrangement)	11
2.2 ส่วนการคำนวณ	13
2.2.1 สมการควบคุม	13
2.2.2 วิธีการแปลงสมการ (Discretization Method)	13
2.2.3 วิธีการประมาณค่า (Scheme)	15
2.2.4 วิธีการวนซ้ำ (Iterative Method)	16

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

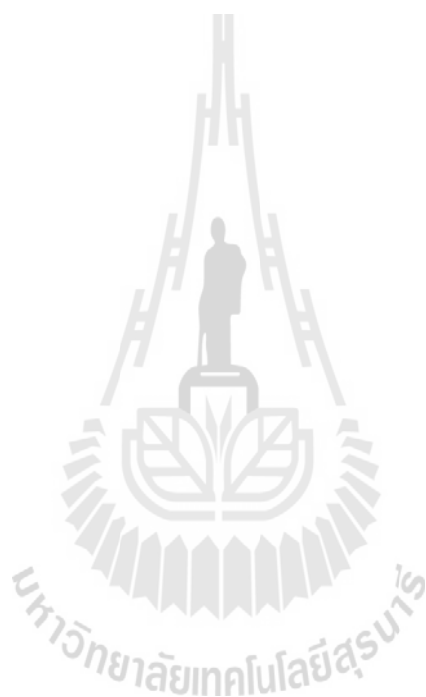
3	วิธีการดำเนินการวิจัย	17
3.1	การประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มบนกริดสามเหลี่ยม	17
3.2	การจัดการฐานข้อมูลกริด	20
3.2.1	การแปลความหมายจากไฟล์ตระกูล *.msh	20
3.2.2	การคำนวณข้อมูลพื้นฐานเพิ่มเติม	26
3.3	การพัฒนาส่วนการคำนวณ	29
3.3.1	การประมาณค่าพจน์การแพร่	29
3.3.2	การประมาณค่าพจน์การพา	32
3.3.3	สมการความดันแก้ไข	35
3.4	การทดสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์	42
3.4.1	ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส	42
3.4.2	ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน	44
3.4.3	ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที	46
3.4.4	ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว	47
3.4.5	ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก	50
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการอภิปรายผล	52
4.1	ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส	52
4.2	ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน	60
4.3	ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที	62
4.4	ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว	65
4.5	ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก	68
5	บทสรุปและข้อเสนอแนะ	71
5.1	บทสรุป	71
5.2	ข้อเสนอแนะ	72
	รายการอ้างอิง	73

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก. คำอธิบายและการคำนวณเพิ่มเติม	75
ภาคผนวก ข. บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา	81
ประวัติผู้เขียน	90



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1	ประมาณการสัดส่วนในการซื้อซอฟต์แวร์ขององค์กรในประเทศไทย.....2
1.2	ประมาณการค่าใช้จ่ายในการซื้อซอฟต์แวร์ขององค์กรภาคเอกชนในประเทศไทย.....2
3.1	การกำหนดคุณสมบัติของของไหลตามค่าเลขเรย์โนลด์ สำหรับปัญหาการไหลในโพรง.....43
3.2	เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที.....46
3.3	เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว.....48
3.4	ลักษณะการไหลผ่านทรงกระบอกในค่าเลขเรย์โนลด์ต่าง ๆ.....49
3.5	เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก.....51
4.1	ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของการหมุนวนหลัก.....56
4.2	แสดงผลต่างมากที่สุดของผลจากโปรแกรมที่พัฒนามากับโปรแกรม Fluent.....59
4.3	การเปรียบเทียบผลการคำนวณความเร็ว u ที่ทางออก.....61

สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
1.1 (a) โรงเรือนเพาะปลูกพืช ณ คอยอ่างขาง และ (b) ผลจำลองการไหลของอากาศโดยใช้ซีเอฟดี	2
1.2 ใบเสนอราคาซอฟต์แวร์ FLUENT	3
2.1 (a) การไหลของอากาศผ่านสไปรลเลอร์ และ (b) ผลคำนวณโดยซอฟต์แวร์ STAR CCM+	6
2.2 (a) การกระจายของควันจากการเผาไหม้น้ำมัน และ (b) ผลการจำลองด้วยซีเอฟดี	7
2.3 ส่วนประกอบหลักของการพัฒนาโปรแกรมซีเอฟดี	7
2.4 ตัวอย่างกริดมีโครงสร้าง (a) แบบ H-Type (b) แบบ O-Type และ (c) แบบ C-Type	9
2.5 ตัวอย่างกริดมีโครงสร้างแบบกลุ่มก้อน	10
2.6 ตัวอย่างกริดไร้โครงสร้าง	10
2.7 ระบบกริดร่วม (a) แบบ Vertex Centered และ (b) แบบ Cell Centered	11
2.8 ระบบกริดเฉียง (a) แบบกึ่งเฉียง และ (b) แบบเฉียงสมบูรณ์	12
2.9 ตัวอย่างการประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ 2 มิติ	14
3.1 รายละเอียดของกริดแบบเซลล์สามเหลี่ยม	20
3.2 โดเมนของปัญหาตัวอย่างและลักษณะกริดที่สร้างได้จาก Gambit	21
3.3 ลักษณะความสัมพันธ์ของด้าน	25
3.4 ตัวเลขที่แปลความฐานข้อมูลกริดที่ได้จาก Gambit (เลขฐาน 16)	25
3.5 ความสัมพันธ์ของเซลล์ P	26
3.6 เส้นทางระหว่างโหนด P และ A ผ่านด้าน e	30
3.7 จำลองการไหลเข้าออกของเซลล์ P	33
3.8 แผนภาพขั้นตอนการแก้ปัญหการไหล	41
3.9 ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส	42
3.10 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส	43

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.11 (a) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน และ (b) โดเมนของปัญหาที่วิเคราะห์	45
3.12 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน	45
3.13 ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที	46
3.14 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที	47
3.15 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว	47
3.16 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว	48
3.17 (a) ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก และ (b) โดเมนปัญหาที่วิเคราะห์	50
3.18 กริดของปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก	51
4.1 ลักษณะการหมุนวนของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส	53
4.2 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 100$	53
4.3 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 400$	54
4.4 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 1000$	54
4.5 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 3200$	55
4.6 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 5000$	55
4.7 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 100$	57
4.8 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 400$	57
4.9 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 1000$	58
4.10 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 3200$	58
4.11 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 5000$	59
4.12 เวกเตอร์ความเร็วของการไหล (a) ผลจากโปรแกรมที่พัฒนา และ (b) ผลจาก Fluent	60
4.13 ผลเปรียบเทียบความเร็วที่ทางออกของการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน	61
4.14 เวกเตอร์การไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีจาก (a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent	63

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.15 เส้นการไหลของการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีจาก (a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent.....	63
4.16 โปรไฟล์ความเร็ว u ที่หน้าตัดระยะ x ต่าง ๆ.....	64
4.17 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที.....	65
4.18 เส้นการไหลของการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว.....	66
4.19 ภาพขยายลักษณะการไหลหลังทรงกระบอกเดี่ยว (a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent.....	67
4.20 ลักษณะการเกิดการหมุนวนด้านหลังทรงกระบอก.....	67
4.21 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว.....	68
4.22 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอกจาก (a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นและ (b) Fluent.....	69
4.23 เส้นการไหลของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอกจาก (a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นและ (b) Fluent.....	70
4.24 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก.....	70
ก.1 การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างคั่นลม.....	76
ก.2 ตัวอย่างการหาจุดบนเส้นตรง.....	78
ก.3 ตัวอย่างการหาค่าสัมประสิทธิ์การประมาณค่าที่ด้าน.....	80

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$\Delta\Omega$	=	ปริมาตรของเซลล์ หรือ ปริมาตรควบคุม
ΔS_i	=	พื้นที่ด้าน i ของเซลล์ หรือ ผิวควบคุม
μ	=	ความหนืด (kg/m.s)
ρ	=	ความหนาแน่น (kg/m ³)
a_i	=	สัมประสิทธิ์ที่ด้าน i ในสมการโมเมนตัม
a_p	=	สัมประสิทธิ์กลางของโหนด P ในสมการโมเมนตัม
$a_i^{p'}$	=	สัมประสิทธิ์ที่ด้าน i ในสมการความดันแก้ไข
$a_p^{p'}$	=	สัมประสิทธิ์กลางของโหนด P ในสมการความดันแก้ไข
D_i	=	อัตราการเปลี่ยนแปลงการแพร่ที่ด้าน i
div	=	ไดเวอร์เจนซ์
F_i^c	=	ฟลักซ์การพาที่ด้าน i
F_i^d	=	ฟลักซ์การแพร่ที่ด้าน i
$grad$	=	เกรเดียนต์
$\hat{i}_{\xi,i}$	=	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางจากโหนดกลางถึงโหนดข้างเคียงของด้าน i
kg	=	กิโลกรัม
L_{PA}	=	ระยะทางจากโหนดกลาง P ถึงโหนดข้างเคียง A
\dot{m}_i	=	อัตราการไหลที่ด้าน i
m	=	เมตร
\hat{n}_i	=	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและพุ่งออกจากด้าน i
p	=	ความดัน (N/m ²)
s	=	วินาที
u	=	องค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร็วในแนว x
\vec{V}	=	เวกเตอร์ความเร็ว
v	=	องค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร็วในแนว v

บทที่ 1

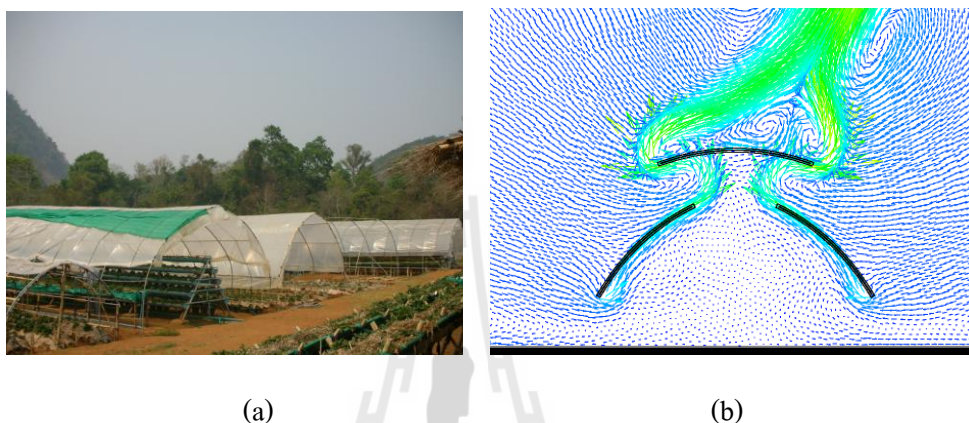
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาการไหลมีบทบาทต่องานทางวิศวกรรมหลายด้าน ความเข้าใจพฤติกรรมกรไหลช่วยให้สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม ปัญหาการไหลส่วนใหญ่มักแก้ไม่ได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ เพราะสมการควบคุมการไหล คือสมการนาเวียร์-สโตกส์มีความซับซ้อนมาก การแก้โดยใช้วิธีทดลองก็มักมีต้นทุนสูงและยุ่งยากต่อการดำเนินการ วิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics: CFD) หรือเรียกย่อว่า “ซีเอฟดี” ซึ่งเป็น วิธีเชิงตัวเลข สำหรับการไหลจึงถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างได้ผลและกว้างขวางในปัจจุบัน เช่น ด้านการเกษตรใช้ศึกษาการแพร่กระจายความชื้นในเมล็ดพืช ใช้ออกแบบเครื่องอบแห้ง ห้องเก็บรักษาผลผลิตทางการเกษตร กระบวนการผลิตเพื่อรักษาระดับอุณหภูมิและความชื้นให้เหมาะสม ด้านไบโอแมคแคนิกส์ ใช้ศึกษาการไหลของเลือดใน หลอดเลือด การไหลเวียนอากาศในท่อปอด ด้านอิเล็กทรอนิกส์ใช้วิเคราะห์การระบายความร้อนบนชิ้นส่วน อิเล็กทรอนิกส์ ใช้ออกแบบเทคนิคการเชื่อมแผงวงจร ใช้ออกแบบห้องสะอาด ด้านยานยนต์ใช้ศึกษาอากาศพลศาสตร์รอบลำตัวรถยนต์ ใช้ออกแบบระบบเผาไหม้ การไหลเวียนอากาศในห้องโดยสาร ด้านพลังงานใช้ออกแบบใบกังหันลม ระบบหมุนเวียนอากาศภายในอาคาร ด้านสิ่งแวดล้อมใช้ทำนายการแพร่กระจายของมลพิษ สภาพภูมิอากาศ ใช้ออกแบบระบบบำบัดน้ำ เป็นต้น ตัวอย่างในรูปที่ 1.1 แสดงการประยุกต์ใช้ซีเอฟดีในการวิเคราะห์การไหลภายในโรงเรือนเพาะปลูกพืช (วิโรจน์ ลิ่มตระการ และคณะ, 2551) ดังนั้นจากที่กล่าวมาจะเห็นว่าการไหลเป็นหัวข้อที่กว้างขวางและมีความสำคัญต่อวิศวกรรมด้านต่าง ๆ ล้วนเกี่ยวข้องกับปัญหาการไหล และสามารถประยุกต์ใช้วิธีซีเอฟดีช่วยวิเคราะห์และออกแบบได้ทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม แม้ว่าวิธีซีเอฟดีจะมีข้อดีคือให้คำตอบที่เป็นเพียงค่าโดยประมาณ ไม่ใช่ค่าแม่นยำตรง แต่เนื่องจากสามารถประยุกต์ใช้งานได้กว้างขวางกว่า วิธีเชิงวิเคราะห์ อีกทั้งมีต้นทุนต่ำและช่วยประหยัดเวลาในการแก้ปัญหาได้อย่างมาก ทั้งภาครัฐและเอกชนจึงหันมาให้ความสนใจและพึ่งพาการออกแบบด้วยวิธีนี้มากขึ้น ซีเอฟดีจึงถูกพัฒนาเป็นซอฟต์แวร์ให้เลือกใช้งานอย่างหลากหลาย อาทิ CFX, FLUENT, STAR-CCM+ เป็นต้น

จากการสำรวจของ สำนักงานส่งเสริมอุตสาหกรรมซอฟต์แวร์แห่งชาติ (Software Industry Promotion Agency: SIPA) แสดงในตารางที่ 1.1 พบว่ามูลค่าการนำเข้าซอฟต์แวร์ สูงกว่า 6.7 หมื่นล้านบาท (ไม่รวมมูลค่าจากการใช้อย่างละเมิดลิขสิทธิ์) และมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นทุกปี อีกทั้งยังพบว่า

ซอฟต์แวร์ดังกล่าวโดยเฉพาะอย่างยิ่งซอฟต์แวร์ด้านซีเอฟดีมีราคาค่อนข้างแพง ดังรูปที่ 1.2 แสดงใบเสนอราคาของซอฟต์แวร์ FLUENT สำหรับ Academic license แบบ 5 Users เมื่อปี 2009 ซึ่งมีราคา 5,600 ดอลลาร์สหรัฐ (ประมาณ 150,000 บาท) ต่อระยะเวลาใช้งาน (ซื้อเช่า) 1 ปี จึงเป็นปัญหาสำหรับภาคอุตสาหกรรมขนาดย่อมที่ต้องแข่งขัน ลดต้นทุน และเพิ่มประสิทธิภาพ แต่ไม่อาจเข้าถึงเทคโนโลยีดังกล่าวนี้ได้ เพราะซอฟต์แวร์ดังกล่าวจะมีราคาแพงขึ้นมากหากเป็น Industrial license



รูปที่ 1.1 (a) โรงเรือนเพาะปลูกพืช ณ ดอยอ่างขาง และ
(b) ผลจำลองการไหลของอากาศโดยใช้ซีเอฟดี

ตารางที่ 1.1 ประมาณการสัดส่วนในการซื้อซอฟต์แวร์ขององค์กรในประเทศไทย

ผู้ใช้	อัตราส่วน (%)
1. ภาครัฐและวิสาหกิจ	43.5
2. ภาคเอกชน	45.1
3. ส่วนครัวเรือน	11.4
รวม	100

ตารางที่ 1.2 ประมาณการค่าใช้จ่ายในการซื้อซอฟต์แวร์ขององค์กรเอกชนในประเทศไทย

ผู้ใช้	มูลค่า (ล้านบาท)		
	2008	2009	2010
ภาคเอกชน (45.1%)	28,385	29,029	30,616
รวม (100%)	62,937	64,365	67,884

ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ จึงมีแนวความคิดพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่รองรับการแก้ปัญหาการไหล 2 มิติ ที่สนับสนุนการคำนวณบนกริดแบบไร้โครงสร้างซึ่งเหมาะกับปัญหารูปทรงซับซ้อน ความเข้าใจในงานจะช่วยพัฒนาบุคลากรให้มีศักยภาพด้านการออกแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งจะช่วยลดต้นทุนการนำเข้าและการพึ่งพาซอฟต์แวร์จากต่างประเทศ นำไปสู่การผลักดันเทคโนโลยีดังกล่าวสู่การใช้งานภาคอุตสาหกรรมในอนาคตได้ ภาคอุตสาหกรรมจะได้รับประโยชน์ในแง่การลดต้นทุน การเพิ่มประสิทธิภาพให้การออกแบบ การปรับปรุงและการพัฒนาเครื่องมือและกระบวนการผลิตต่าง ๆ



Ref: Tim/SUT-TH/16

Item	Description	Unit	Price (USD)
<i>Software</i>			
A	Fluent Academic Bundle - no. of active processes/users: 5 - license term: 1 year - license type: academic teaching and research - software: Fluent & Gambit - includes additional 8 cores parallel computing capability for solving - operating system: Windows & UNIX/Linux	1	5 600.00
Special Package Price for SUT			4 900.00
* The special offers are valid upon PO/quotation confirmation before 30 th APR 2009 only*			
The above pricing excludes all custom duties, withholding tax, import tax or valued added tax.			

รูปที่ 1.2 ใบเสนอราคาซอฟต์แวร์ FLUENT

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์บนพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม บนระบบกริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยม สำหรับจำลองการไหลราบเรียบแบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ 2 มิติ

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1.3.1 ปัญหาการไหลที่วิเคราะห์เป็นปัญหาการไหลราบเรียบแบบคงตัว และอัดตัวไม่ได้ ใน 2 มิติ โดยไม่พิจารณาผลกระทบของความร้อน

1.3.2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เฉพาะส่วนการคำนวณ (Solver)

1.3.3 ใช้ภาษา C++ (OOP) ในการเขียนรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.3.4 ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์โวลุ่มในการแปลงสมการควบคุม

1.3.5 ใช้ข้อมูลกริดไว้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยมจากโปรแกรม Gambit

1.3.6 ทดสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นกับ 5 ปัญหาทดสอบ

- 1) การไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- 2) การไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน
- 3) การไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที
- 4) การไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว
- 5) การไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

1.4 วิธีดำเนินการศึกษาวิจัย

1.4.1 ศึกษาหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม และเทคนิคการเขียนรหัสโปรแกรม ในขั้นตอนนี้จะทำความเข้าใจกับสมการควบคุมการไหลที่เกี่วข้อง เทคนิคการแปลงสมการควบคุมบนพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม การประยุกต์แผนวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ ได้แก่ วิธีผลต่างต้นลม วิธีผลต่างกลาง ศึกษาขั้นตอนวิธี SIMPLE ที่จะใช้ใน แก้สมการ ระบบสมการการไหล รวมถึงแนวทางการเขียนรหัสโปรแกรมด้วยภาษา C++ (OOP) เทคนิคการประกาศตัวแปร การจองหน่วยความจำ การส่งข้อมูลระหว่าง Class รูปแบบการแสดงผลข้อมูล

1.4.2 ศึกษา การ จัดการ ข้อมูล กริดจาก ไฟล์ .msh ของ โปรแกรม Gambit แบบ 2 มิติ เนื่องจากการวิจัยนี้จะทำการพัฒนาโปรแกรมเฉพาะส่วนการคำนวณเท่านั้น ข้อมูลกริดสำหรับป้อนให้กับส่วนการคำนวณจะถูกสร้างขึ้นโดยใช้โปรแกรม Gambit ในขั้นตอนนี้จะศึกษารายละเอียดและเทคนิคการสร้างกริด รวมถึงการแปลความหมายและทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของตัวเลขในฐานข้อมูลกริดที่สร้างได้ดังกล่าว

1.4.3 ศึกษาหลักการของ ระเบียบวิธี ไฟไนต์โวลุ่ม ในปัญหา 2 มิติ บนกริดสาม เหลี่ยม เนื่องจาก การวิจัยมุ่งเพื่อแก้ ปัญหาการไหล ที่มีรูปทรงซับซ้อน ดังนั้นกริดไว้โครงสร้าง แบบสามเหลี่ยมจึงถูกนำมาประยุกต์เข้ากับการแบ่งโดเมนออกเป็นเซลล์เล็ก ๆ ด้วยลักษณะการจัดวางตัวอย่างไว้รูปแบบของกริดชนิดนี้ การประยุกต์ ระเบียบวิธี ไฟไนต์โวลุ่ม เข้ากับกริดจึงต้องอาศัยเทคนิคต่าง ๆ เข้าช่วยเพื่อให้การคำนวณมีความถูกต้องตามหลักการ ในขั้นตอนนี้จะศึกษาเทคนิคการประมาณค่าฟังก์ชันที่ด้านของเซลล์ การหาค่าเกรเดียนต์ และเทคนิคการประมาณค่าต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงขั้นตอนวิธี SIMPLE ซึ่งจะถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้หาคำตอบของระบบสมการ

1.4.4 ทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น ขั้นตอนนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น ว่ามีความแม่นยำในการคำนวณมากน้อยเพียงใด มีความสามารถในการจัดการกับเงื่อนไขการไหลรูปแบบ ต่าง ๆ ได้หลากหลายเพียงใด โดย

นำไปประยุกต์เข้ากับปัญหา ทดสอบที่มีผลเฉลยให้เปรียบเทียบ ทั้งหมด 5 ปัญหา ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 1.3.6

1.4.5 สรุปและจัดทำเอกสารรายงานการวิจัย

1.5 สถานที่ทำงานวิจัย

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.6 เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

1.6.1 โปรแกรม Gambit 2.4.6 สำหรับการสร้างโดเมนปัญหาและข้อมูลกริด

1.6.2 โปรแกรม Microsoft Visual C++ 6.0 สำหรับการเขียนรหัสโปรแกรม

1.6.3 โปรแกรม Fluent 6.3.26 สำหรับการหาผลเฉลยเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

1.6.4 โปรแกรม MatLab R2010a สำหรับการแสดงผล

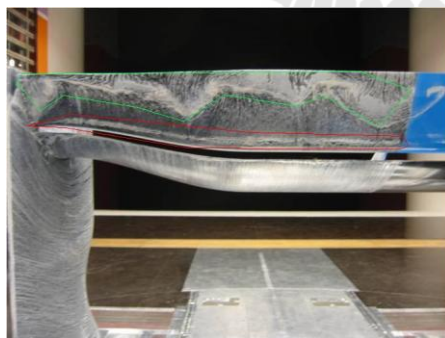
1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่สามารถคำนวณ การไหล แบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ 2 มิติ บนพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มและกริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยม ที่มีความน่าเชื่อถือ ในการใช้งาน

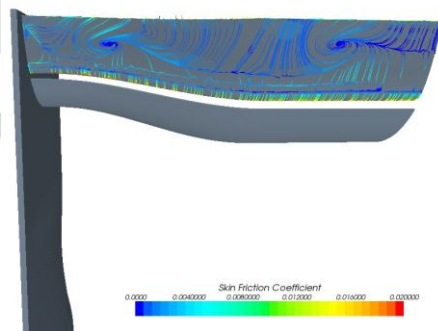
บทที่ 2

ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความสำเร็จของการประยุกต์ใช้วิธีซีเอฟดี ส่งผลให้ภายหลังมีการนำไปประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ปัญหาในภาคอุตสาหกรรมและงานวิจัยต่าง ๆ ยกตัวอย่างเช่น การจำลองการไหลของอากาศผ่านสปอยเลอร์ของรถยนต์สูตรหนึ่งนำไปสู่การปรับปรุงรูปทรงของสปอยเลอร์ให้มีความเหมาะสม ขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าผลการจำลอง สอดคล้องเป็นอย่างดีกับการทดสอบจริง (Malan et al, 2009) การ ทำนายลักษณะการกระจายตัวของควันที่เกิดจากการเผาบน้ำมันในกรงเบกแดดช่วงสงครามอิรัก ดังแสดงในรูปที่ 2.2 จากรูปภาพถ่ายทางอากาศช่วยยืนยันผลการทำนายที่เกิดขึ้นดังกล่าว (Patnaik et al, 1994) ปัจจุบันซีเอฟดียังถูกพัฒนาไปถึงขั้นใช้ทำนายการไหลแบบเทอร์บิวเลนต์และทรานสิชัน (Sulaksana et al, 2008) เพื่อให้ได้ความสมจริงของการจำลองการไหลที่นำไปสู่การออกแบบที่มีประสิทธิภาพขึ้น สำหรับตัวอย่างที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ มีเผยแพร่อย่างแพร่หลายวารสารวิชาการ เช่น Journal of Fluid Mechanics, Journal of Heat and Fluid Flow และบนเว็บไซต์ต่าง ๆ เช่น ECOPTAC, CFD online เป็นต้น

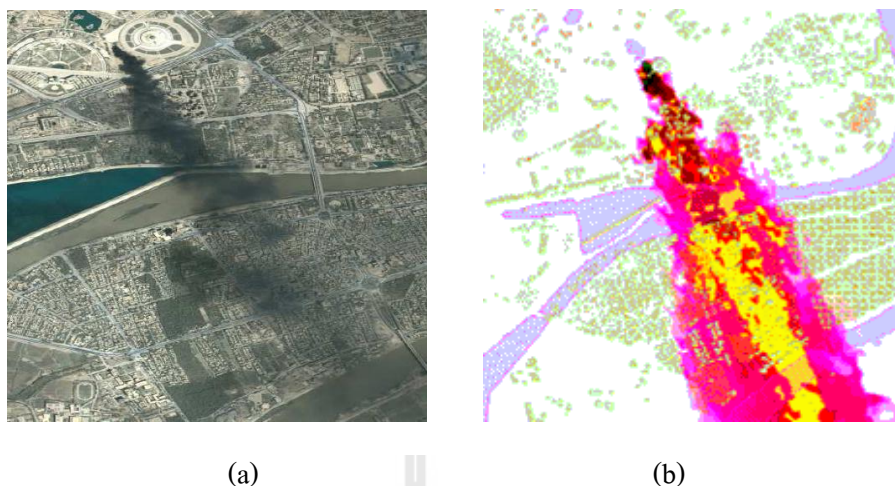


(a)



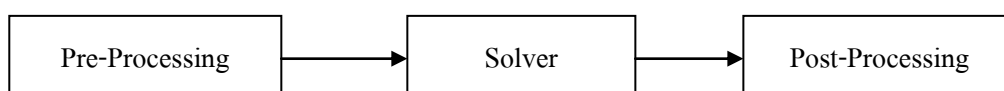
(b)

รูปที่ 2.1 (a) การไหลของอากาศผ่านสปอยเลอร์ และ
(b) ผลคำนวณโดยซอฟต์แวร์ STAR CCM+
(Malan et al, 2009)



รูปที่ 2.2 (a) การกระจายของควันจากการเผาบน้ำมัน และ
(b) ผลการจำลองด้วยซีเอฟดี (Patnaik et al, 1994)

เบื้องหลังผลลัพธ์ที่แสดงในรูปข้างต้นคือรหัสคำสั่งของโปรแกรมที่เขียนอย่างมีแบบแผน มีการใช้เทคนิคและขั้นตอนดำเนินการต่าง ๆ ตั้งแต่การสร้างรูปทรงปัญหา การกำหนดเงื่อนไข การแก้สมการควบคุม จนถึงการแสดงผล สำหรับการพัฒนาโปรแกรมซีเอฟดีโดยทั่วไปมักแบ่งขั้นตอนดังกล่าวออกเป็น 3 ส่วนหลักคือ ส่วนก่อนการประมวลผล (Pre-Processing) ส่วนการประมวลผล หรือส่วนคำนวณ (Solver) และส่วนแสดงผลหรือส่วนหลังการประมวลผล (Post-Processing) ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ส่วนประกอบหลักของการพัฒนาโปรแกรมซีเอฟดี

2.1 ส่วนก่อนการประมวลผล

ส่วนก่อนการประมวลผลถือว่าที่มีความสำคัญอันดับแรก เกี่ยวข้องกับการ จัดเตรียมข้อมูล ป้อนให้กับส่วนการประมวลผลซึ่ง ถือเป็นหัวใจของโปรแกรม หากจัดเตรียมข้อมูลที่ไม่เหมาะสมก็อาจส่งผลให้การคำนวณผิดพลาด ได้ผลเฉลยที่ไม่ถูกต้อง หรืออาจเลวร้ายถึงขนาดที่ไม่สามารถคำนวณหาคำตอบได้ ข้อมูลหลักที่ต้อง จัดเตรียม ในขั้นตอนก่อนการประมวลผลคือ รูปทรงโดเมน ปัญหา ข้อมูลกริด และข้อมูลเงื่อนไขขอบ โดยทั่วไปสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน โดเมนปัญหา

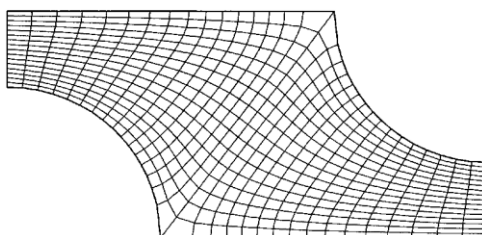
มักถูกสร้างจากซอฟต์แวร์ ช่วยเขียนแบบทางวิศวกรรม เช่น โปรแกรม Solid Work, Auto CAD เป็นต้น จากนั้นจึงป้อนเข้ามาดำเนินการต่อในซอฟต์แวร์ สร้างกริด ซึ่งมีให้เลือกใช้หลากหลาย เช่นกัน เช่น โปรแกรม TGrid, Gambit, ANSYS เป็นต้น

2.1.1 ลักษณะของกริด

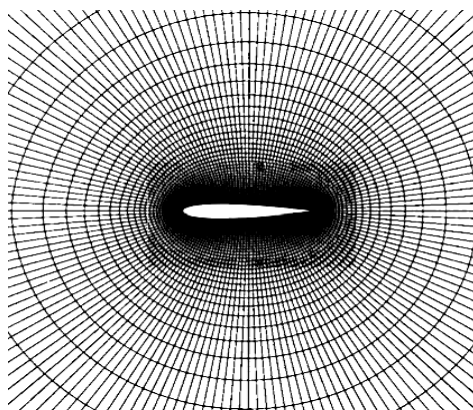
กริดคือเส้นที่ลากตัดกันไปมาด้วยรูปแบบที่กำหนด เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม เป็นต้น เพื่อแบ่งโดเมนออกเป็นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเซลล์ ลักษณะของกริดที่สร้าง มีผลโดยตรงต่อความถูกต้องของผลเฉลยที่จะได้รับการคำนวณ โดยหลักการแล้วกริดที่ละเอียดจะให้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องมากกว่ากริดที่หยาบ อย่างไรก็ตาม ความสมบูรณ์ในการแนบเส้นกริดเข้ากับรูปร่างของโดเมนปัญหา ก็เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่สำคัญ เพราะจะทำให้การกำหนดค่าที่ขอบมีความสมจริงและความถูกต้องมากขึ้น ลักษณะของกริดแบ่งได้ 2 แบบ คือ กริดมีโครงสร้าง (Structured Grid) และกริดไร้โครงสร้าง (Unstructured Grid) รายละเอียดดังนี้

2.1.1.1 กริดมีโครงสร้าง

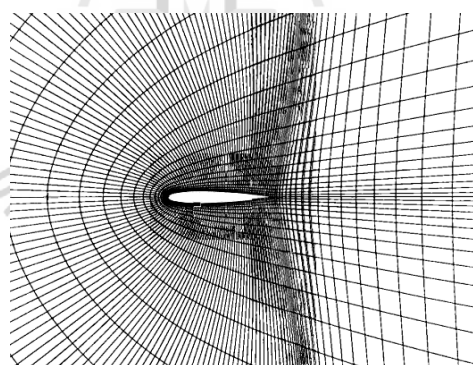
กริดมีโครงสร้างเกิดจากเส้นอย่างน้อย 2 กลุ่มที่มาตัดกัน โดยเส้นกลุ่มเดียวกันจะไม่ตัดกัน แต่จะตัดกับทุกเส้นของกลุ่มอื่นได้เส้นละ 1 ครั้ง สำหรับกรณี 2 มิติ การตัดกันดังกล่าวก่อให้เกิดเซลล์ รูปสี่เหลี่ยม ซึ่งแต่ละเซลล์ประกอบด้วยเซลล์ข้างเคียงจำนวน 4 เซลล์ กริดลักษณะนี้ให้ความเสถียรในการคำนวณ ค่อนข้างสูง แต่มักประสบปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้กับรูปทรง ที่ซับซ้อน อีกทั้ง มีความยากในการควบคุม การกระจายตัวตามส่วน ที่ต้องการ กริดมีโครงสร้างแบ่งเป็น 3 ชนิดตามลักษณะโครงสร้าง ได้แก่ แบบ H-type เหมาะกับรูปทรงที่มีลักษณะเป็นเหลี่ยม แบบ O-type เหมาะกับ รูปทรง ที่มีลักษณะ โค้งกลมหรือมีความมน และแบบ C-type เหมาะกับรูปทรงที่มีลักษณะมนด้านหน้า ตัวอย่างของกริดมีโครงสร้างในแบบต่าง ๆ แสดงในรูปที่ 2.4



(a)



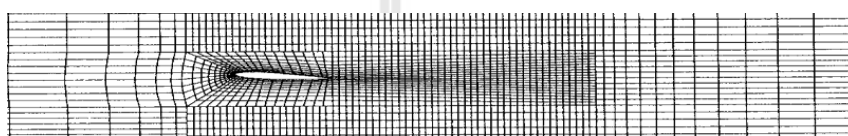
(b)



(c)

รูปที่ 2.4 ตัวอย่างกริดมีโครงสร้าง (a) แบบ H-Type (b) แบบ O-Type และ
(c) แบบ C-Type (Ferziger, and Peric, 2002)

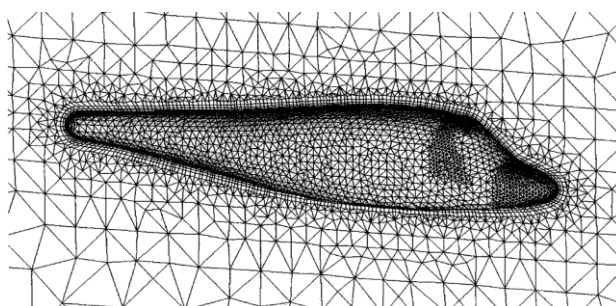
เพื่อแก้ปัญหาเรื่องการควบคุมการกระจายตัวตามส่วนที่ต้องการ ของกริดมีโครงสร้างจึงมีการสร้างกริดมีโครงสร้างแบบกลุ่มก้อน (Block-Structured Grid) ขึ้นใช้งาน หลักการคือแบ่ง โดเมนออกเป็น ส่วน ๆ จากนั้นสร้าง กริดบนแต่ละส่วนด้วยรูปแบบและความละเอียดที่ต่างกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.5 เป็นการแบ่งโดเมนออกเป็น 5 ส่วนคือ หน้า หลัง บน ล่าง และบริเวณใกล้ผิววัตถุ โดยบริเวณใกล้ผิววัตถุเป็นกริดแบบ C-type ส่วนบริเวณอื่นเป็นกริดแบบ H-type ที่มีความละเอียดต่างกันไป อย่างไรก็ตามกริดลักษณะนี้ยังประสบปัญหา ในเรื่องการเข้าสู่ที่ซ้ำและต้องอาศัยเทคนิคพิเศษในการจัดการความสัมพันธ์บริเวณหน้าสัมผัสระหว่างแต่ละโดเมนย่อย



รูปที่ 2.5 ตัวอย่างกริดมีโครงสร้างแบบกลุ่มก้อน (Ferziger, and Peric, 2002)

2.1.1.2 กริดไร้โครงสร้าง

กริดไร้โครงสร้างเป็นลักษณะกริดที่มีความยืดหยุ่นสูง สามารถแนบเข้าได้กับทุกรูปร่างโดเมน ประยุกต์ใช้ได้กับระเบียบวิธีไฟไนต์อีเลเมนต์และ ไฟไนต์โวลูม ลักษณะของกริดชนิดนี้ใน 2 มิติเป็นได้ทั้งสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.6 กริดไร้โครงสร้างมีความยุ่งยากในการจัดฐานข้อมูลการคำนวณ เนื่องจากมีความเอียงและความละเอียดที่ไม่คงที่ของกริด



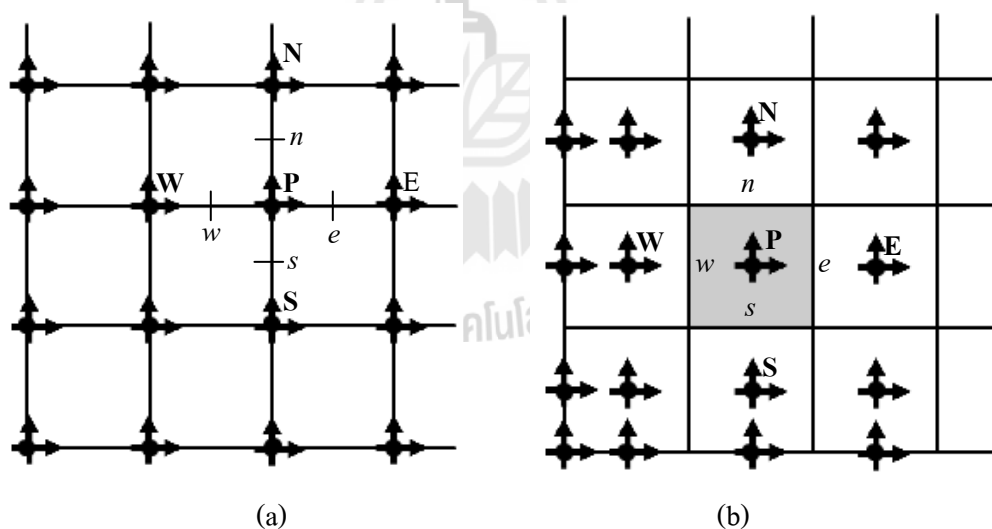
รูปที่ 2.6 ตัวอย่างกริดไร้โครงสร้าง (Ferziger, and Peric, 2002)

2.1.2 ระบบการจัดวางกริด (Grid Arrangement)

ระบบจัดวางกริดคือ ระบบที่ใช้ในการเก็บตัวแปรต่าง ๆ ในแต่ละเซลล์สำหรับการคำนวณ โดยแบ่งเป็น 2 ลักษณะคือ ระบบกริดร่วม (Colocated grid) และระบบกริดเยื้อง (Staggered grid) โดยแต่ละระบบส่งผลต่อการเลือกวิธีการประมาณค่าและความซับซ้อนของการคำนวณ

2.1.2.1 ระบบกริดร่วม

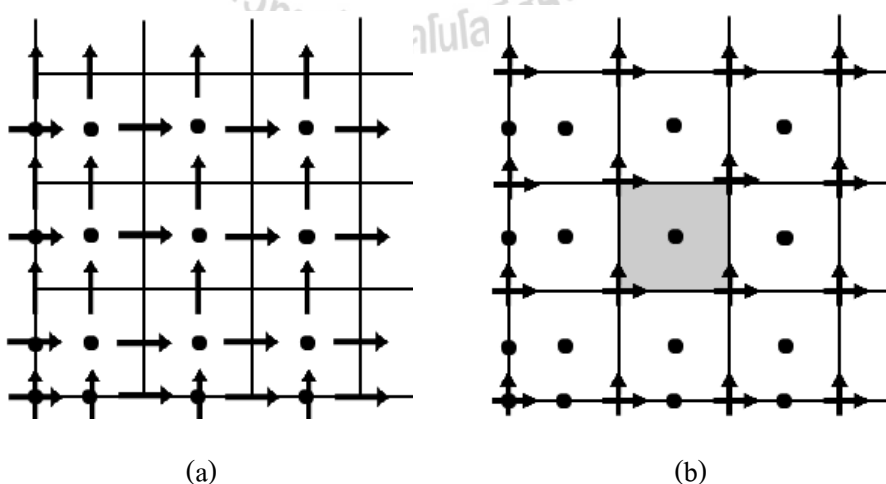
กริดระบบนี้ตัวแปรทุกตัว ถูกเก็บไว้ที่จุด เดียวกัน ดังแสดงใน รูปที่ 2.7 โดยข้อดีของระบบกริดร่วม คือ สามารถใช้ได้กับโดเมนปัญหาที่ซับซ้อน โดยเฉพาะปัญหาที่มีขอบเอียงหรือมีเงื่อนไขขอบไม่ต่อเนื่อง ข้อเสียของระบบกริดนี้ คือ มีความยากในการหาค่าความดันความเร็วควบคู่ (Pressure-Velocity Coupling) สำหรับปัญหาการไหลที่อัดตัวไม่ได้ จึงมีการแก้ของค่าความดันค่อนข้างมาก ในปี 1960 จึงมีการพัฒนาระบบกริดเยื้องขึ้นมาใช้งาน ทำให้ระบบกริดร่วมไม่เป็นที่นิยมใช้ในปัญหาการไหลที่อัดตัวไม่ได้ ต่อมา Rhie and Chow (1983) ได้พัฒนาวิธีการหาค่าความดันความเร็วขึ้นจากการเฉลี่ยค่าความเร็วที่ด้านจากสมการโมเมนตัม จึงทำให้ระบบ กริดร่วมเป็นที่นิยมอีกครั้ง



รูปที่ 2.7 ระบบกริดร่วม (a) แบบ Vertex Centered และ (b) แบบ Cell Centered

2.1.2.2 ระบบกริดเยื้อง

ระบบกริดเยื้องนำเสนอโดย Harlow and Welsh (1965) เป็นระบบกริดที่เก็บค่าตัวแปรแยกเป็น 3 ชุด คือ ตัวแปรความเร็ว u ตัวแปรความเร็ว v และค่าตัวแปรสเกลาร์ อาทิ ความดัน ความหนาแน่น ความหนืด และสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เป็นต้น แต่ละชุดตัวแปรจะถูกจัดวางบนตำแหน่งกริดที่ต่างกัน กล่าวคือ ตัวแปรความดันจะถูกจัดวาง ที่จุดโหนดของเซลล์ ตัวแปรความเร็วจะถูกจัดวางไว้ที่กึ่งกลางของด้านเซลล์หรือมุมของเซลล์ หากวางความเร็ว u ไว้ที่ขอบซ้ายและขวาของ ด้านเซลล์ ส่วนความเร็ว v ถูกจัดวางไว้ที่ขอบบนและล่างของ ด้านเซลล์ ซึ่งความเร็วทั้งหมดยังอยู่ในแนวเดียวกันกับความดัน ดังแสดงใน รูปที่ 2.8(a) ระบบกริดนี้เรียกว่าระบบกริดกึ่งเยื้อง หากวางความเร็ว u และ v ไว้ที่มุมของเซลล์และความดันอยู่ที่โหนดของเซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 2.8(b) ระบบกริดนี้จะเรียกว่าระบบกริดเยื้องสมบูรณ์ (ALE, Arbitrary Lagrangian Eulerian) (Hirt et al, 1974) ระบบกริดเยื้องมี ข้อดีคือ มีความสอดคล้องกับหลักการไหลที่ว่าความต่างของความดันก่อให้เกิดการไหล ให้ประสิทธิภาพ ในการคำนวณค่าพจน์การพาของสมการควบคุมการไหล อันเป็นผลจากอัตราการไหลที่เกิดขึ้นที่ด้าน ทำให้การคำนวณทั้งระบบมีความเสถียรมากขึ้น บนกริดระบบ พิกัดฉาก ข้อเสียคือมีความยากในการจัดการ กรณีที่กริดไม่เป็นระบบฉาก รวมถึงปัญหาที่มีโดเมน มีรูปร่าง ซับซ้อน เพราะการสร้างเซลล์เก็บค่าใน ตำแหน่งที่เยื้องกันทำได้ยาก เนื่องจากเซลล์มีการล้ำขอบของโดเมน ดังนั้นสำหรับกริดที่ไม่เป็นระบบฉาก จึงมีการเก็บค่าตัวแปรความเร็วจะนิยมใช้ระบบกริดเยื้องสมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม ระบบกริดนี้ยังอาจเกิดการแกว่งของค่าความเร็ว และความดันอยู่ในกริดที่ไม่ตั้งฉาก



รูปที่ 2.8 ระบบกริดเยื้อง (a) แบบกึ่งเยื้อง และ (b) แบบเยื้องสมบูรณ์

2.2 ส่วนการคำนวณ

เป็นส่วนการหาค่าประมาณของคำตอบของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยอันดับแรกต้องทราบสมการควบคุมของปัญหานั้น ๆ ก่อน จากนั้นเลือกวิธีการแปลงสมการที่เหมาะสม วิธีการประมาณค่า และวิธีการวนซ้ำ ตามลำดับ

2.2.1 สมการควบคุม

สำหรับปัญหาการไหลราบเรียบแบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ 2 มิติ สมการควบคุมการไหลดังกล่าว ประกอบด้วย สมการโมเมนตัม ในทิศทาง x และ y และสมการอนุรักษมวล ซึ่งมีรูปแบบสมการเป็นตามลำดับดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho vu}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho vv}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

เมื่อ ρ = ความหนาแน่น (kg/m^3)

u = ความเร็วตามแกน x (m/s)

v = ความเร็วตามแกน y (m/s)

μ = สัมประสิทธิ์ความหนืด (kg/m.s)

p = ความดัน (N/m^2)

2.2.2 วิธีการแปลงสมการ (Discretization Method)

สมการควบคุมของปัญหา ทางวิศวกรรมส่วนใหญ่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งไม่สามารถใช้คอมพิวเตอร์แก้ได้ตรง เนื่องจากคอมพิวเตอร์ไม่เข้าใจ การดำเนินการแบบ อนุพันธ์ย่อย ดังนั้นจึงต้อง แปลง สมการ ให้มีรูปแบบเป็น พีชคณิต (บวก ลบ คูณ หาร) ซึ่งเป็นการดำเนินการ ที่คอมพิวเตอร์เข้าใจได้เสียก่อน โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่พบเห็นได้ทั่วไป มี 3 วิธี คือ ระเบียบวิธี

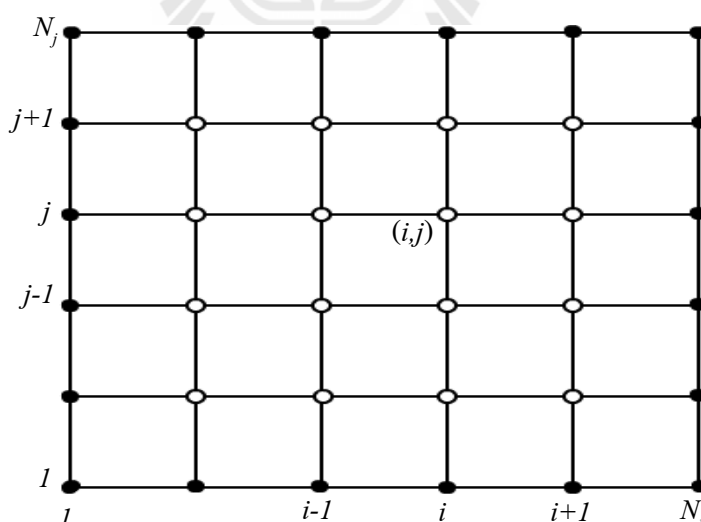
ไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลเมนต์ (Finite Element Method) และระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม (Finite Volume Method) มีรายละเอียดดังนี้

ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ เป็นวิธีดั้งเดิมที่นำเสนอโดย Euler ในช่วงศตวรรษที่ 18 วิธีนี้ประยุกต์อนุกรม เทย์เลอร์ ในการ ประมาณค่าพจน์ อนุพันธ์ย่อย ของสมการ ให้เป็น พีชคณิต สมการพีชคณิตจะถูกนำไป ประยุกต์เข้ากับ แต่ละ จุด โหนด ดังแสดงใน รูปที่ 2.9 การ ประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์เทียบแกน x ได้ดังสมการที่ 2.5 และ 2.6

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i \Delta x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i \Delta x^n \quad (2.5)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i \Delta x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i \Delta x^n \quad (2.6)$$

โดยสมการ ที่ (2.5) เป็นรูปแบบ การ ประมาณค่าไปข้าง หน้า ส่วนสมการ ที่ (2.6) เป็นรูปแบบ การ ประมาณค่าย้อนกลับ



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างการประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ 2 มิติ

ระเบียบวิธีไฟไนต์ ดิฟเฟอเรนซ์ นี้มักประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหามีรูปทรงไม่ ซับซ้อน มีการกระจายตัวของกริดอย่างเป็นระเบียบ

ระเบียบ วิธีไฟไนต์อิลเมนต์ วิธีการนี้จะ แบ่ง โดเมนปัญหา ออกเป็นอิลเมนต์ย่อย ๆ ในการประมาณค่าสมการอนุพันธ์ย่อย วิธีนี้จะมีการคูณด้วยฟังก์ชันรูปแบบ (Shape or Weight Function) ก่อนการอินทิเกรตรอบโดเมน โดยฟังก์ชันรูปแบบอย่างง่ายที่สุดของ ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลเมนต์ คือ ฟังก์ชันรูปแบบเส้นตรง ซึ่งจะถูกรวบไว้ในรูปแบบของค่าที่มุมของแต่ละอิลเมนต์ ลักษณะของฟังก์ชันรูปแบบชนิดเดียวจะมีลักษณะเหมือนกันทั้งโดเมน ข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์อิลเมนต์ คือใช้ได้ผลดีกับโดเมนปัญหาที่ซับซ้อน และง่ายในการเพิ่มความละเอียดกริดในแต่ละอิลเมนต์โดยเปลี่ยนฟังก์ชัน รูปแบบของอิลเมนต์นั้น นอกจากนี้ยังมีการนำหลักการของปริมาตรควบคุม ประยุกต์เข้ากับ ระเบียบ วิธีไฟไนต์อิลเมนต์ เรียกว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลเมนต์ พื้นฐานปริมาตรควบคุม (Control Volume based Finite Element Method) ซึ่งจะให้ฟังก์ชันรูปแบบของตัวแปรรอบอิลเมนต์ ปริมาตรควบคุมจะอยู่ที่เซนทรอยด์ ของแต่ละอิลเมนต์ การอินทิเกรตสมการควบคุมจากปริมาตรควบคุม จะมีลักษณะคล้ายกับ ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อน เช่น ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วน การหาฟังก์ชันรูปแบบจะมีความยากและซับซ้อน ส่งผลให้ ระเบียบ วิธีไฟไนต์อิลเมนต์ มีขีดความสามารถจำกัดในการประยุกต์แก้ปัญหการไหล

ระเบียบ วิธีไฟไนต์โวลุ่ม เป็นวิธีที่ คล้ายกับ ระเบียบ วิธีไฟไนต์อิลเมนต์ในหลายแง่ เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหาโดเมนที่ซับซ้อนได้ การแบ่งโดเมนให้เป็นปริมาตรควบคุมเล็ก ๆ ที่เรียกว่า “เซลล์” เป็นต้น ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงภายใน เซลล์ โดยอาศัยการ ประมาณค่าสมการควบคุมด้วยการอินทิเกรตรอบปริมาตรควบคุมย่อย เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงภายในปริมาตรควบคุมซึ่ง เกี่ยวข้องกับการไหลเข้าออกของคุณสมบัติผ่านผิวควบคุม ดังนั้นในแต่ละสมการพีชคณิตที่ได้จากการแปลงสมการควบคุมในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย ปรากฏผลของเซลล์ข้างเคียงด้วย หลักการ ของระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมทางกายภาพของการไหล ดังนั้นจึงนิยมประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหการไหล

2.2.3 วิธีการประมาณค่า (Scheme)

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในแต่ละวิธีมีวิธีการประมาณค่าตามพจน์ในสมการควบคุมต่างกัน และแต่ละวิธีการประมาณค่าก็มีผลต่อ ความถูกต้องของการคำนวณไม่เหมือนกันและยังทำให้ยากต่อการเขียนและสั่งการโปรแกรมคอมพิวเตอร์ รวมถึงมีผลกับความเร็วของการประมวลผลอีกด้วย ดังนั้นจะต้องเลือกวิธีการประมาณค่าให้เหมาะสม โดยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลเมนต์เลือกจากฟังก์ชันรูปแบบ ส่วนระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มมีวิธีการประมาณค่าความพจน์ที่ได้จากการ อินทิเกรตที่ผิวและปริมาตรควบคุม

2.2.4 วิธีการวนซ้ำ (Iterative Method)

วิธีการวนซ้ำ เป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ระบบสมการพีชคณิต ด้วยข้อดีของการคำนวณแบบวนซ้ำที่แก้ปัญหาเรื่องค่าเคลื่อนที่เคลื่อนสละสมได้ วิธีการวนซ้ำจึงเป็นที่นิยม ใช้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับการแก้ปัญหาค่าการไหล การเลือกใช้วิธีการวนซ้ำขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้พัฒนาโปรแกรม เทคนิคของการวนซ้ำที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหามีได้แก่ (1) การวนซ้ำแบบจุดต่อจุด (Point-by-point) เทคนิคนี้จะแก้สมการหาคำตอบทีละโหนดไปเรื่อย ๆ จนครบคำตอบที่ได้จากโหนดที่ 1 จะถูกใช้เป็นข้อมูลป้อนให้กับการแก้หาคำตอบของโหนดที่ 2 และเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบทุกโหนด จากนั้นก็วนกลับมาคำนวณหาคำตอบที่จุดที่ 1 และวนไปเรื่อย ๆ จนกว่าผลเฉลยทั้งโดเมนจะลู่เข้าสู่คำตอบ เทคนิคการวนซ้ำแบบจุดต่อจุด ที่รู้จักกันดีคือ วิธีเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel method) ข้อดีของเทคนิคนี้คือ ใช้หน่วยความจำน้อย มีกระบวนการที่ง่าย และประยุกต์ใช้กับการแก้โดเมนที่ซับซ้อนได้ดี ข้อด้อยคือการคำนวณลู่เข้าค่อนข้างช้า (2) การวนซ้ำแบบแถวต่อแถว (Line-by-Line) ใช้หลักการคล้ายกับการวนซ้ำแบบจุดต่อจุด เพียงแต่การคำนวณเกิดขึ้นทีละแถวกริดซึ่งประกอบด้วยจุดโหนดหลายจุด เทคนิคการวนซ้ำแบบแถวต่อแถวที่รู้จักกันดีคือ ขั้นตอนวิธีเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tri-Diagonal Matrix Algorithm: TDMA) ข้อดีของเทคนิคนี้คือ มักให้ผลการลู่เข้าที่เร็วกว่าวิธีแบบจุดต่อจุด แต่ข้อด้อยคือใช้หน่วยความจำมากกว่า และประยุกต์ใช้ได้กับโดเมนที่มีการแบ่งกริดแบบมีโครงสร้างเท่านั้น (3) การคำนวณทั้งโดเมน (Plane-by-Plane) หรือการแก้ระบบสมการพร้อมกันทั้งโดเมน แนวทางนี้ต้องอาศัยเทคนิคต่าง ๆ เข้าช่วยค่อนข้างมาก ทั้งเทคนิคการจัดเมทริกซ์ให้เหมาะสม เทคนิคการคำนวณเพื่อเร่งการลู่เข้า เป็นต้น เทคนิคการวนซ้ำแบบนี้มีหลายวิธี เช่น วิธี SIP (Strong Implicit Procedure) ซึ่งนำเสนอโดย Stone (1980) วิธี ILU วิธีเกรเดียนต์สังยุค (Conjugate Gradient) เป็นต้น

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ทำการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลใน 2 มิติ โดยมีเงื่อนไขคือ เป็นการไหลแบบราบเรียบในสภาวะคงตัว และอัดตัวไม่ได้ ไม่พิจารณาผลของอุณหภูมิ สำหรับวิธีการดำเนินการวิจัยมีขั้นตอนดังนี้

- 3.1 ศึกษาการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มบนกริดสามเหลี่ยม
- 3.2 ศึกษาการจัดการฐานข้อมูลกริด
- 3.3 ศึกษาการพัฒนาส่วนการคำนวณ
- 3.4 ทดสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์
 - 3.4.1 ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 - 3.4.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน
 - 3.4.3 ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที
 - 3.4.4 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว
 - 3.4.5 ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

3.1 การประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มบนกริดสามเหลี่ยม

ไฟไนต์โวลุ่ม เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่ใช้แปลง สมการควบคุม ที่อยู่ในรูปแบบ อนุพันธ์ย่อยให้เป็นรูปแบบพีชคณิต โดยอาศัยการอินทิเกรตสมการ ควบคุมดังกล่าวตลอด ปริมาตรควบคุม เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงภายในปริมาตรควบคุมนั้น สำหรับปัญหาการไหลในสภาวะคงตัวแบบ 2 มิติ สมการควบคุม คือ สมการนาเวียร์ – สโตกส์ ประกอบด้วยสมการโมเมนตัม ในทิศทาง x และ y และสมการความต่อเนื่องซึ่งมีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

เมื่อ ρ = ความหนาแน่น (kg/m^3)
 u = ความเร็วตามแกน x (m/s)
 v = ความเร็วตามแกน y (m/s)
 μ = สัมประสิทธิ์ความหนืด (kg/m.s)
 p = ความดัน (N/m^2)

สมการ ที่ (3.1) ถึง (3.3) สามารถเขียน ให้อยู่ในรูป ทั่วไป ของสมการ ขนส่ง คุณสมบัติ (Transport Equation) ได้ดังนี้

$$\text{div}(\rho \vec{V} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (3.4)$$

เมื่อ ϕ = ตัวแปรคุณสมบัติ
 Γ = เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่
 ρ = ความหนาแน่นของของไหลนั้น
 \vec{V} = เป็นเวกเตอร์ความเร็ว
 S_ϕ = เป็นพจน์แหล่งกำเนิด

ยกตัวอย่างเช่น หากแทน ϕ ด้วย u แทน Γ ด้วยความหนืด (μ) และแทน S_ϕ ด้วย $-\partial p / \partial x$ สมการที่ได้จะเป็นสมการโมเมนตัมในทิศทาง x เป็นต้น

บนพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม สมการควบคุมจะถูกอินทิเกรตบนปริมาตรควบคุมเพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงภายในปริมาตรควบคุม ดังนี้

$$\int_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{V} \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}(\mu \text{grad } \phi) d\Omega + \int_{\Omega} S_\phi d\Omega \quad (3.5)$$

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงในปริมาตรควบคุมเกี่ยวข้องกับการไหลเข้าออกของคุณสมบัติผ่านผิวควบคุมที่ล้อมรอบปริมาตรควบคุมนั้น ๆ ดังนั้นการอินทิเกรตบนปริมาตรควบคุม สมการที่ (3.5) จึง

สามารถแปลงให้อยู่ในรูปการอินทิเกรตบนผิวควบคลุม ได้โดยใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ (Gauss's Divergence Theorem)

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{a}) d\Omega = \int_S \hat{n} \cdot \vec{a} dS \quad (3.6)$$

เมื่อ \vec{a} = สนามเวกเตอร์

\hat{n} = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางพุ่งออกตั้งฉากกับผิวควบคลุม

$d\Omega$ = ปริมาตรของเซลล์

dS = ผิวของเซลล์

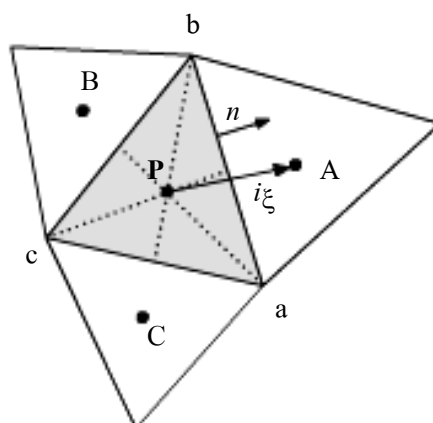
ดังนั้นจะได้

$$\int_S \hat{n} \cdot (\rho \vec{V} \phi) dS = \int_S \hat{n} \cdot (\mu \text{grad } \phi) dS + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^3 \hat{n}_i \cdot (\rho \vec{V} \phi)_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^3 \hat{n}_i \cdot (\mu \text{grad } \phi)_i \Delta S_i + S_{\phi} \Delta \Omega \quad (3.8)$$

เมื่อ i = ดัชนีของด้านของเซลล์ ซึ่งในที่นี้ใช้เซลล์แบบสามเหลี่ยมจึงมี 3 ด้าน

พจน์ด้านซ้ายมือของสมการ คือ พจน์การพา ซึ่งแสดงพฤติกรรมเคลื่อนที่ ของของไหลจากการคล พจน์แรกด้านขวามือ คือ พจน์การแพร่ และพจน์ที่สองด้านขวามือ คือ พจน์แหล่งกำเนิด โดยพจน์การแพร่ เกี่ยวข้องกับ พฤติกรรมการกระจาย จากผลกระทบ ของความหนืด ส่วนพจน์แหล่งกำเนิดในสมการโมเมนตัมคือ เกรเดียนต์ความดัน ในการแปลงสมการด้วยวิธีไฟไนต์โวลุ่ม แต่ละพจน์จะถูกประมาณค่าด้วยวิธีที่ต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของพจน์ เนื่องจากงานวิจัยนี้ประยุกต์ใช้กริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยมในการคำนวณ การจัดเรียงกริดอาจบิดตัวส่งผลให้แนวเส้นระหว่างโหนดไม่ ตั้งฉากกับ เส้นหน้าตัดของเซลล์ ดังนั้น การวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ ระหว่างโหนดกลางกับโหนดข้างเคียงจึงต้องอาศัยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเพื่อกำกับทิศทาง ดังแสดงในรูปที่ 3.1



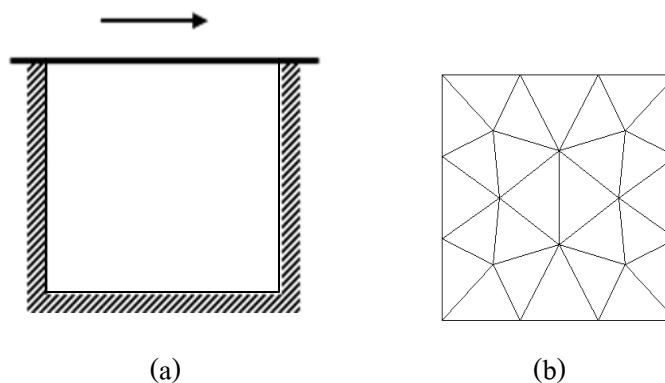
รูปที่ 3.1 รายละเอียดของกริดแบบเซลล์สามเหลี่ยม

3.2 การจัดการฐานข้อมูลกริด

การพัฒนาโปรแกรม คอมพิวเตอร์สำหรับงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม Gambit ในการสร้างกริดให้เพราะเป็น โปรแกรมที่มีความน่าเชื่อถือ โดยมีมาตรฐานในการสร้างกริดสามเหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขของค่า EquiAngle Skew เท่ากับ 1 พารามิเตอร์ดังกล่าวถูกใช้ควบคุม ให้กริดที่สร้างมีรูปร่างใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่ามากที่สุด โดยที่มุมภายในสามเหลี่ยมมีค่าอยู่ระหว่าง 54 ถึง 72 องศา นอกจากนั้น การใช้งาน โปรแกรม Gambit ยังมีขั้นตอนไม่ยุ่งยาก เริ่มจากการสร้าง รูปทรง โดเมน ปัญหา จากนั้นกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ต้องการ เช่น จำนวนและชนิดของกริด เงื่อนไขขอบของปัญหา เป็นต้น เมื่อสร้างเสร็จและรัน โปรแกรมจะ ให้ข้อมูลกริด ซึ่งเป็น ไฟล์ในตระกูล *.msh ออกมา

3.2.1 การแปลความหมายจากไฟล์ตระกูล *.msh

การแปลไฟล์ตระกูล *.msh สามารถอธิบายด้วยตัวอย่างในรูปที่ 3.2(a) เป็นการสร้างข้อมูลกริดสำหรับโดเมนปัญหาสี่เหลี่ยม 2 มิติ ขนาด 1x1 โดเมนปัญหามีลักษณะสี่เหลี่ยมและทุกด้านเป็นผนัง ผนังบนที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่จากซ้ายไปขวา และภายในโพรงบรรจุของไหลจนเต็ม และนำไปสร้างกริดด้วยโปรแกรม Gambit โดยแบ่งขอบของโดเมนปัญหาเป็น 3 ส่วนเท่ากัน เลือกชนิดของเซลล์แบบสามเหลี่ยม ขอบซ้าย ขอบขวา และขอบล่างเป็นผนังตรึง (Fixed wall) ส่วนขอบบนเป็นผนังเคลื่อนที่ (Moving wall) กริดที่สร้างได้แสดงในรูปที่ 3.2(b)



รูปที่ 3.2 โดเมนของปัญหาตัวอย่างและลักษณะกริดที่สร้างได้จาก Gambit

จากรูปที่ 3.2(b) เส้นกริดที่ลากตัดกันก่อให้เกิด รูปสามเหลี่ยม ที่เรียกว่า เซลล์ (Cell) ซึ่งมีทั้งหมด 26 เซลล์ แต่ละเซลล์ประกอบด้วยด้าน 3 ด้าน มุมของเซลล์เรียกว่า จุดมุม (Vertex) ซึ่งในที่นี้ทั้งหมด 20 จุดมุม และจุดเซนทรอยด์ของเซลล์เรียกว่า โหนด (Node) ข้อมูลกริดที่โปรแกรม Gambit ส่งออกเป็นไฟล์ตระกูล *.msh มีลักษณะข้อมูลดังนี้

1	(<input type="text" value="0"/> "GAMBIT to Fluent File")	
2	(<input type="text" value="0"/> "Dimension:")	
3	(<input type="text" value="2"/> 2)	
4	(<input type="text" value="10"/> (<input type="text" value="0"/> <input type="text" value="14"/> 1 2))	
5	(<input type="text" value="10"/> (<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="14"/> 1 2))	
6	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
7	0.0000000000E+00	1.0000000000E+00
8	1.0000000000E+00	0.0000000000E+00
9	3.3333333333E-01	0.0000000000E+00
10	6.6666666667E-01	0.0000000000E+00
11	0.0000000000E+00	3.3333333333E-01
12	0.0000000000E+00	6.6666666667E-01
13	1.0000000000E+00	1.0000000000E+00
14	1.0000000000E+00	6.6666666667E-01
15	1.0000000000E+00	3.3333333333E-01
16	3.3333333333E-01	1.0000000000E+00

17 6.6666666667E-01 1.0000000000E+00
 18 7.8274883288E-01 2.2490098115E-01
 19 7.5427513763E-01 4.9999985277E-01
 20 2.1725158248E-01 2.2492563476E-01
 21 7.8274879152E-01 7.7508155535E-01
 22 2.1724967220E-01 7.7507459840E-01
 23 2.4572638347E-01 4.9999942355E-01
 24 5.0000055076E-01 3.0919366674E-01
 25 5.0000146827E-01 6.9080232676E-01
 26))
 27 ([0] "Faces:")
 28 ([13] ((0) [1] [2d] 0))
 29 ([13] ((3) [1] [9] [3] 0)) (45 ([13] ((6) [d] [2d] [2] 0))
 30 2 1 6 0 3 46 2 d 5 1 b 63 2 13 4 c 12
 31 2 6 7 0 a 47 2 3 d 1 2 64 2 e 9 d e
 32 2 7 2 0 8 48 2 a d 2 14 65 2 10 e d 17
 33 2 1 4 4 0 49 2 f 6 3 11 66 2 e a e 14
 34 2 4 5 c 0 50 2 1 f 3 4 67 2 14 10 f 17
 35 2 5 3 1 0 51 2 4 f 4 12 68 2 c 14 f 10
 36 2 8 9 0 5 52 2 10 9 5 d 69 2 b 14 10 13
 37 2 9 a 0 e 53 2 8 10 5 6 70 2 f 12 11 18
 38 2 a 3 0 2 54 2 c 10 6 f 71 2 13 f 12 18
 39)) 55 2 11 b 7 13 72 2 11 14 13 16
 40 ([13] ((4) [a] [c] [3] 0)) 56 2 2 11 7 8 73 2 e d 14 15
 41 2 2 b 0 7 57 2 7 11 8 9 74 2 e 13 15 19
 42 2 b c 0 10 58 2 12 11 9 16 75 2 12 14 16 1a
 43 2 c 8 0 6 59 2 7 12 9 a 76 2 14 e 17 19
 44)) 60 2 6 12 a 11 77 2 13 12 18 1a
 61 2 13 5 b c 78 2 14 13 19 1a
 62 2 d 13 b 15 79))

- 80 ($\boxed{0}$ "Cells:")
 81 ($\boxed{12}$ ($\textcircled{0}$ $\textcircled{1}$ $\boxed{1a}$ 0))
 82 ($\boxed{12}$ ($\textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ $\boxed{1a}$ 1 $\textcircled{1}$))
 83 ($\boxed{0}$ "Zones:")
 84 ($\boxed{45}$ ($\textcircled{2}$ fluid fluid)())
 85 ($\boxed{45}$ ($\textcircled{3}$ wall wall.2)())
 86 ($\boxed{45}$ ($\textcircled{4}$ wall MOVE)())
 87 ($\boxed{45}$ ($\textcircled{6}$ interior default - interior)())

ตัวเลขที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมซ้อน คือ ชนิดของข้อมูล

- 0_{16} การละข้อความ (Comment)
 2_{16} มิติ (Dimension)
 10_{16} จุดมุม (Vertex)
 12_{16} เซลล์ (Cell)
 13_{16} ด้านของเซลล์ (Face)
 45_{16} โซน (Zone)

ตัวเลขที่อยู่ในรูปวงกลม คือ หมายเลขกำกับของโซน (Zone Index)

- 0_{16} โดเมนทั้งหมด
 1_{16} จุดมุมของโดเมนแรก
 2_{16} ของไหล
 3_{16} โซนแรก หรือ เงื่อนไขขอบแรก
 4_{16} โซนที่สอง หรือ เงื่อนไขขอบที่สอง
 6_{16} โซนสุดท้าย หรือ
 โซนของโหนดภายใน (Interior Zone)

ตัวเลขที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม คือ หมายเลขกำกับแรกของโซนนั้น ๆ

ตัวเลขที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยม คือ หมายเลขกำกับสุดท้ายของโซนนั้น ๆ

ตัวเลขที่อยู่ในรูปหกเหลี่ยม คือ ชนิดของลักษณะเงื่อนไขขอบ

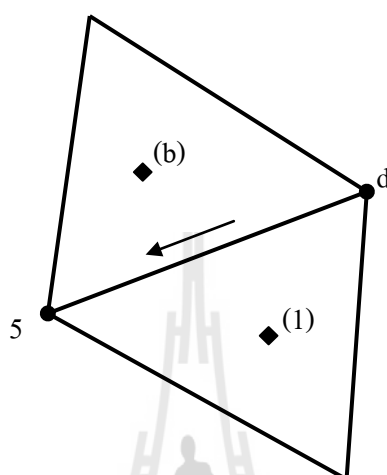
- 2_{16} โหนดภายใน (Interior)
 3_{16} ผนัง (Wall)
 4_{16} ทางเข้าแบบให้ความดัน (Pressure Inlet)

5_{16}	ทางออกแบบให้ความดัน (Pressure Outlet)
7_{16}	สมมาตร (Symmetry)
8_{16}	ขอบเงาของคาบ (Periodic shadow)
9_{16}	ขอบความดันที่ห่างไกล (Pressure Far Field)
a_{16}	ทางเข้าแบบให้ความเร็ว (Velocity Inlet)
c_{16}	แบบคาบ (Periodic)
e_{16}	พัดลม (Fan)
14_{16}	ทางเข้าแบบให้อัตราการไหล (Mass Flow Rate)
18_{16}	หน้าสัมผัส (Interface)
$1f_{16}$	โหนดแขวน (Hanging Node)
24_{16}	ทางออก (Outflow)
25_{16}	แกน (Axis)
ตัวเลขที่อยู่ในรูปวงกลมซ้อน คือ ชนิดของลักษณะเซลล์	
0_{16}	ผสม (Mixed)
1_{16}	สามเหลี่ยม (Triangular)
2_{16}	ทรงสี่หน้า (Tetrahedral)
3_{16}	สี่เหลี่ยม (Quadrilateral)
4_{16}	ทรงหกหน้า (Hexahedral)
5_{16}	พีระมิด (Pyramid)
6_{16}	ค้อน (Wedge)
7_{16}	ทรงหลายหน้า (Polyhedral)
ตัวเลข 0 ที่ถูกขีดเส้นใต้ คือ โหนดบนขอบนอกของโดเมน	

จากรูปที่ 3.2 และข้อมูลที่ได้จาก Gambit สามารถแปลได้ว่า กริดที่ได้มีจำนวนจุดมุมทั้งหมด $14_{16} = 20$ จุด (บรรทัดที่ 4) ตัวเลขทศนิยมใน บรรทัดที่ 6 ถึง 25 เป็นพิกัดของจุดมุมดังกล่าว โดยคอลัมน์แรกเป็นพิกัด x และคอลัมน์ที่สองเป็นพิกัด y มีเส้นกริดที่ประกอบเป็นด้านของเซลล์ทั้งหมด $2d_{16} = 45$ ด้าน เงื่อนไขขอบโดเมนมี 2 ส่วน ส่วนแรกชื่อ “wall.2” (บรรทัดที่ 85) ตั้งแต่ด้านที่ 1_{16} ถึง 9_{16} (บรรทัดที่ 29) ส่วนที่ 2 ชื่อ “MOVE” (บรรทัดที่ 86) ตั้งแต่ด้านที่ a_{16} ถึง c_{16} (บรรทัดที่ 29) ทั้งสองส่วนมีเงื่อนไขเป็นผนัง (บรรทัดที่ 29 และ 40) มีจำนวนเซลล์ทั้งหมด $1a_{16} = 26$ เซลล์

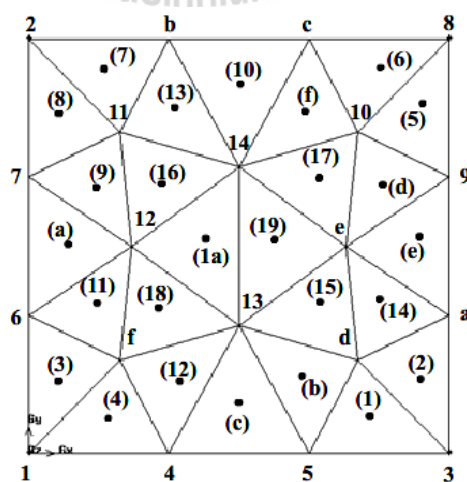
สำหรับความสัมพันธ์ที่ด้านจากบรรทัดที่ 30 ถึง 38, 41 ถึง 43 และ 46 ถึง 78 อธิบายได้จากรูปที่ 3.3 จากบรรทัดที่ 46 ตัวเลขแรก คือ การบอกจำนวนมิติ (2_{16}) ตัวเลขที่สอง คือ หมายเลข

กำกับของจุดมุมแรกของด้าน (d_{16}) ตัวเลขที่สาม คือ หมายเลขกำกับ ของจุดมุมที่สองของด้าน (5_{16}) ตัวเลขที่สี่ คือ หมายเลขกำกับของเซลล์เมื่อจุดมุมแรกถึงจุดมุมที่สองมีทิศทางวนเข็มนาฬิกา (1_{16}) และ หมายเลขกำกับของเซลล์ที่อยู่อีกฝั่งของด้านนี้ (b_{16})



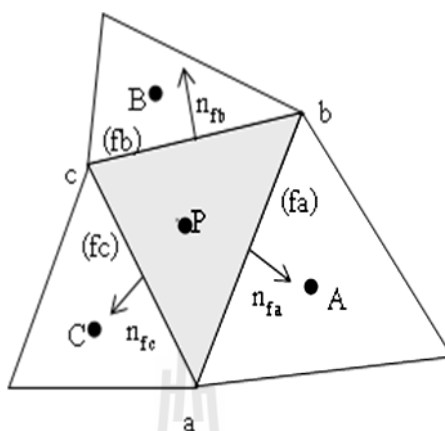
รูปที่ 3.3 ลักษณะความสัมพันธ์ของด้าน

จากการแปลงข้อมูลสามารถระบุความสัมพันธ์ของตัวเลขต่าง ๆ ลงไปบนเซลล์ได้ดังแสดงในรูปที่ 3.4 โดยตัวเลขที่อยู่ในวงเล็บเป็นหมายเลขเซลล์ ส่วนตัวเลขที่ไม่มีวงเล็บเป็นหมายเลขจุดมุม



รูปที่ 3.4 ตัวเลขที่แปลความฐานข้อมูลกริดที่ได้จาก Gambit (เลขฐาน 16)

จากความสัมพันธ์ของด้านสามารถสร้างโครงสร้างความสัมพันธ์ของแต่ละเซลล์เพื่อความสะดวกในการคำนวณได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ความสัมพันธ์ของเซลล์ P

$$P = [a, b, c, a, fa, fb, fc, A, B, C] \quad (3.9)$$

สมการที่ (3.9) คือ โครงสร้างความสัมพันธ์ของ เซลล์ P ซึ่งประกอบด้วย จุดมุม 3 จุด (a, b, c) ด้าน 3 ด้าน (fa, fb, fc) โหนดข้างเคียง 3 โหนด (A, B, C) และหากเรียงจุดมุม ด้าน และ โหนดข้างเคียงในทิศทางเข็มนาฬิกา จะทำให้การคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางตั้งฉากด้านได้ เป็นเวกเตอร์ที่พุ่งออกจากด้าน ซึ่งจะเป็นทิศทางที่ถูกใช้อ้างอิงที่สำคัญในการคำนวณ ข้อมูลกริดที่ได้จาก Gambit จะถูกนำไปประมวลผลคำนวณเพิ่มเติมเพื่อหาพิกัดจุดโหนด ปริมาตรของเซลล์ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในตั้งฉากด้าน และพารามิเตอร์อื่น ๆ ที่จำเป็น

3.2.2 การคำนวณข้อมูลพื้นฐานเพิ่มเติม

การหาพิกัดโหนด (x_p, y_p) คือ จุดเซนทรอยด์ของเซลล์ ในกรณีเซลล์สามเหลี่ยมจากรูปที่ 3.5 จุดดังกล่าวอยู่ในตำแหน่งจุดตัดของเส้นมัธยฐาน ซึ่งพิกัดดังกล่าวคำนวณได้จาก

$$x_p = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad (3.10)$$

$$y_p = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } (x_a, y_a) &= \text{พิกัดของจุดมุม } a \\ (x_b, y_b) &= \text{พิกัดของจุดมุม } b \\ (x_c, y_c) &= \text{พิกัดของจุดมุม } c\end{aligned}$$

การหาปริมาตรของเซลล์ ($\Delta\Omega$) ใน 2 มิติ คือ การหาพื้นที่ของเซลล์ ซึ่งหาได้จากสมการที่ (3.12) ปริมาตรของเซลล์มีค่าเป็นค่าบวกเมื่อพิกัดจุดมุมของเซลล์เรียงตามเข็มนาฬิกา และมีค่าเป็นลบเมื่อพิกัดจุดมุมของเซลล์เรียงตามเข็มนาฬิกา ดังนั้นในการวิเคราะห์จะต้องจัดเรียงลำดับจุดมุมอย่างระมัดระวัง

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_a - x_b)(y_a + y_b) + \\ (x_b - x_c)(y_b + y_c) + \\ (x_c - x_a)(y_c + y_a) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

การหาพื้นที่หน้าควมของเซลล์ (ΔS_i) ใน 2 มิติ คือ การหาขนาดของด้านหรือเส้นขอบของเซลล์ หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\Delta S_{fa} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \quad (3.13a)$$

$$\Delta S_{fb} = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} \quad (3.13b)$$

$$\Delta S_{fc} = \sqrt{(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2} \quad (3.13c)$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางพุ่งออก ในแนวฉากของด้าน (n_i) หาได้จากตำแหน่งของจุดมุมของแต่ละด้าน

$$n_{fa} = \frac{y_b - y_a}{\Delta S_{fa}} \hat{i} - \frac{x_b - x_a}{\Delta S_{fa}} \hat{j} \quad (3.14a)$$

$$n_{fb} = \frac{y_c - y_b}{\Delta S_{fb}} \hat{i} - \frac{x_c - x_b}{\Delta S_{fb}} \hat{j} \quad (3.14b)$$

$$n_{fc} = \frac{y_a - y_c}{\Delta S_{fc}} \hat{i} - \frac{x_a - x_c}{\Delta S_{fc}} \hat{j} \quad (3.14c)$$

ระยะจากโหนดพิจารณาถึงโหนดข้างเคียง (L_{PA}) คือการหาความยาวของเส้นเชื่อมระหว่างโหนดถึงโหนดรอบเซลล์

$$L_{PA} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} \quad (3.15a)$$

$$L_{PB} = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \quad (3.15b)$$

$$L_{PC} = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} \quad (3.15c)$$

เมื่อ (x_P, y_P) = พิกัดของโหนด P

(x_A, y_A) = พิกัดของโหนด A

(x_B, y_B) = พิกัดของโหนด B

(x_C, y_C) = พิกัดของโหนด C

เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยทิศทางสู่โหนดข้างเคียง ($\hat{i}_{\xi,i}$) หาได้จากตำแหน่งของจุดโหนดของเซลล์หลักและเซลล์รอบ ๆ

$$\hat{i}_{\xi,fa} = \frac{x_A - x_P}{\Delta S_{fa}} \hat{i} + \frac{y_A - y_P}{\Delta S_{fa}} \hat{j} \quad (3.16a)$$

$$\hat{i}_{\xi,fb} = \frac{x_B - x_P}{\Delta S_{fb}} \hat{i} + \frac{y_B - y_P}{\Delta S_{fb}} \hat{j} \quad (3.16b)$$

$$\hat{i}_{\xi,fc} = \frac{x_C - x_P}{\Delta S_{fc}} \hat{i} + \frac{y_C - y_P}{\Delta S_{fc}} \hat{j} \quad (3.16c)$$

3.3 การพัฒนาส่วนการคำนวณ

หลังจากสร้างฐานข้อมูลกริดที่ได้จากโปรแกรม Gambit เรียบร้อยแล้ว ข้อมูลดังกล่าวจะถูกส่งเข้าประมวลผลในส่วนการคำนวณเพื่อเป็นข้อมูลในการคำนวณตามขั้นตอนวิธีเชิงตัวเลข สำหรับการพัฒนาส่วนการคำนวณ กระบวนการเริ่มจากการแปลงสมการอนุพันธ์ของสมการควบคุมให้เป็นสมการพีชคณิตบนพื้นฐานระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม ในขั้นตอนนี้อาจมีฟังก์ชันต่าง ๆ ในสมการควบคุมจะถูกประมาณโดยอาศัยวิธีการเชิงตัวเลขที่เหมาะสมดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.3.1 การประมาณค่าพจน์การแพร่

พจน์การแพร่ของสมการควบคุมการไหล คือ พจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ความหนืด บน พื้นฐานกริดสามเหลี่ยม พจน์ดังกล่าวถูกประมาณค่าโดยวิธีผลต่างกลาง ซึ่งให้อันดับความแม่นยำเท่ากับสอง และถูกแปลงให้อยู่ในรูปฟลักซ์การแพร่บนด้านของเซลล์ (F_e^d) เนื่องจากการบิดตัวของกริดที่ก่อให้เกิดความไม่เที่ยงตรงกันของด้านกับเส้นเชื่อมระหว่างโหนด ดังนั้นการประมาณค่าฟลักซ์การแพร่จึงต้องปรับให้อยู่ในแนวตั้งฉากกับด้านโดยอาศัยเวกเตอร์ทิศทางตั้งฉากด้าน (\hat{n}_e) ดังแสดงในรูปที่ 3.6 สมการสำหรับฟลักซ์การแพร่ที่ด้าน e คำนวณได้ดังนี้

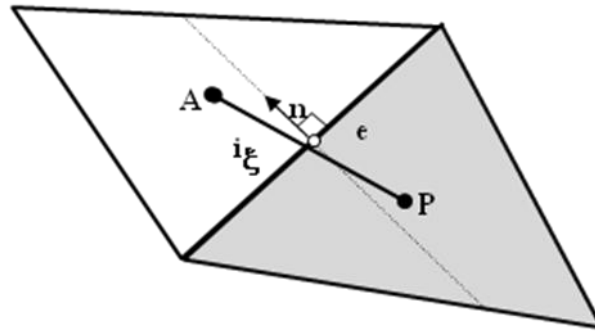
$$F_e^d = \hat{n}_e \cdot (\mu \text{ grad } \phi)_e \Delta S_e \quad (3.17)$$

$$F_e^d = \mu_e \Delta S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_e \quad (3.18)$$

กรณีเส้นระหว่างโหนด P ถึง โหนดข้างเคียง A ตั้งฉากกับด้าน e พจน์การแพร่สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$F_e^d = \mu_e \Delta S_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \mu_e \Delta S_e \left(\frac{\phi_A - \phi_P}{L_{PA}} \right) \quad (3.19)$$

เมื่อ L_{PA} = ระยะทางระหว่างโหนด P ถึง โหนดข้างเคียง A



รูปที่ 3.6 เส้นทางระหว่างโหนด P และ A ผ่านด้าน e

จากรูปที่ 3.6 จะเห็นได้ว่าสำหรับกริดสามเหลี่ยมเส้นระหว่างโหนด P และ A ไม่ตั้งฉากกับด้าน e ปรากฏการณ์เช่นนี้พบเห็นได้เสมอในกรณีปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนและกริดมีการบิดตัวแบบไร้โครงสร้าง ซึ่งมักส่งผลให้การคำนวณขาดเสถียรภาพ Muzaferija (1994) ได้แนะนำแนวทางแก้ไขโดยให้นำผลของเกรเดียนต์ในทิศทางของเส้นเชื่อมโหนด (ξ) มารวมเข้าอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e \right]^{old} \quad (3.20)$$

ดังนั้นฟลักซ์การแพร่ (F_e^d) จึงถูกปรับให้มีรูปแบบดังนี้

$$F_e^d = \mu_e \Delta S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e + \mu_e \Delta S_e \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e \right]^{old} \quad (3.21)$$

$$\text{เมื่อ } \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_e^{old} = (\text{grad } \phi)_e^{old} \cdot n_e$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e^{old} = (\text{grad } \phi)_e^{old} \cdot \hat{i}_{\xi,e}$$

ตัวยก old = ค่าที่ได้จากรอบการคำนวณซ้ำครั้งก่อน

ดังนั้นจึงได้รูปแบบของฟังก์ชันการแพร่เป็น

$$F_e^d = \mu_e \Delta S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e + \mu_e \Delta S_e \left[\overline{(\text{grad } \phi)}_e \cdot (n_e - \hat{i}_{\xi,e}) \right]^{old} \quad (3.22)$$

จากสมการที่ (3.22) จะเห็นว่าเมื่อเส้นระหว่างโหนด P และ A ตั้งฉากกับด้าน e เวกเตอร์ n_e กับ $\hat{i}_{\xi,e}$ จะอยู่ในแนวเดียวกันจึงส่งผลให้ $(n_e - \hat{i}_{\xi,e})$ เท่ากับศูนย์ การประมาณค่าพจน์การแพร่ด้วยวิธีนี้จะยังคงมีความถูกต้องอันดับสอง แต่หากจุดตัดระหว่างเส้นเชื่อม โหนด P และ A กับด้าน e ไม่อยู่ที่จุดกลางด้าน การประมาณค่าจะมีความถูกต้อง ลดลง อย่างไรก็ตามเนื่องจาก กริดที่สร้างจาก โปรแกรม Gambit มีมาตรฐานของขนาดมุมภายในของกริดสามเหลี่ยมอยู่ที่ 54 ถึง 72 องศา ซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังนั้นสมการที่ใช้ในการประมาณค่าพจน์การแพร่ สำหรับทุกด้านของเซลล์ จึงเขียนได้ในรูปสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^3 F_i^d = \sum_{i=1}^3 D_i (\phi_A - \phi_P) + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} \quad (3.23)$$

$$\text{เมื่อ } D_i = \frac{\mu_i \Delta S_i}{L_{PA}}$$

$$S_{d-cross,i} = \mu_i \Delta S_i \left[\overline{(\text{grad } \phi)}_i \cdot (n_i - \hat{i}_{\xi,i}) \right]^{old}$$

จากสมการที่ (3.23) นำมาจัดรูปใหม่ด้วยค่าสัมประสิทธิ์จะได้สมการประมาณค่าพจน์การแพร่ดังนี้

$$a_P \phi_P = a_A \phi_A + a_B \phi_B + a_C \phi_C + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} \quad (3.24)$$

เมื่อ $a_A = D_1$ เป็นสัมประสิทธิ์ด้านที่ 1 ติดกับเซลล์ A

$a_B = D_2$ เป็นสัมประสิทธิ์ด้านที่ 1 ติดกับเซลล์ B

$a_C = D_3$ เป็นสัมประสิทธิ์ด้านที่ 1 ติดกับเซลล์ C

$a_P = a_A + a_B + a_C$ เป็นสัมประสิทธิ์กลางของเซลล์ P

การหาค่าเกรเดียนต์สามารถหาได้จากทฤษฎีไดเวอร์เจนส์ของเกาส์ ดังนี้

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{\Delta \Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i \hat{n}_{x,i} \Delta S_i \right) \quad (3.25a)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_P = \frac{1}{\Delta \Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i \hat{n}_{y,i} \Delta S_i \right) \quad (3.25b)$$

เมื่อ ϕ_i = ค่าที่ด้าน i

\hat{n}_i = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากด้าน i ประกอบด้วย $n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$

ΔS_i = พื้นที่หน้าตัดด้าน i

$\Delta \Omega$ = ปริมาตรของเซลล์ P

3.3.2 การประมาณค่าพจน์การพา

เนื่องจากการพาเกี่ยวข้องกับความเร็วซึ่งเป็นคุณสมบัติที่มีทิศทาง ดังนั้น การประมาณค่าคุณสมบัติที่ด้านจึงเกี่ยวข้องกับขนาดและทิศการไหลผ่านเข้าออกด้านด้วยในที่นี้ใช้วิธีการประมาณค่าแบบผลต่างต้นลมเพราะให้เสถียรภาพในการคำนวณสูงมีรูปแบบการประมาณค่าตามสมการที่ (3.26) สำหรับรายละเอียดของวิธีผลต่างต้นลมนำเสนอไว้ในภาคผนวก ก.1

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P, & v_{n,e} > 0 \text{ (outward)} \\ \phi_A, & v_{n,e} < 0 \text{ (inward)} \end{cases} \quad (3.26)$$

จากสมการที่ (3.8) พจน์การพาถูกนำมาเขียนในรูปของฟลักซ์การพาที่ด้านได้ดังนี้

$$F_e^c = \hat{n}_e \cdot \left(\rho \vec{V} \phi \right)_e \Delta S_e = (\rho_e \Delta S_e v_{n,e}) \phi_e = \dot{m}_e \phi_e \quad (3.27)$$

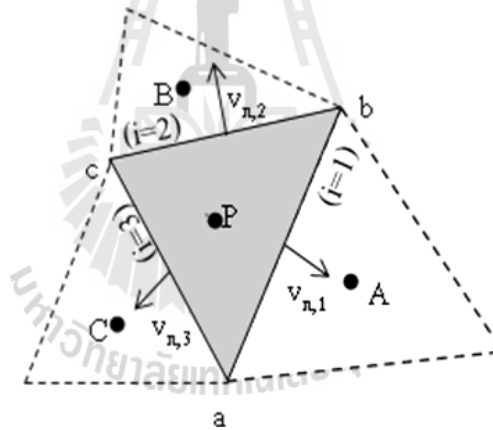
เมื่อ \dot{m}_e = $\rho_e \Delta S_e v_{n,e}$ เป็นอัตราการไหลเข้าออกผ่านด้าน e ของเซลล์

จากสมการที่ (3.8) แทนค่าด้วยสมการที่ (3.22) และสมการที่ (3.27) สามารถจัดรูปได้
ดังนี้

$$\sum_{i=1}^3 \hat{n}_i \cdot \left(\rho \vec{V} \phi \right)_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^3 \hat{n}_i \cdot (\mu \text{grad}(\phi))_i \Delta S_i + S_\phi \Delta \Omega \quad (3.28a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \dot{m}_i \phi_i = \sum_{i=1}^3 D_i (\phi_A - \phi_P) + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} + S_\phi \Delta \Omega \quad (3.28b)$$

$$\dot{m}_1 \phi_1 + \dot{m}_2 \phi_2 + \dot{m}_3 \phi_3 = D_1 \phi_A + D_2 \phi_B + D_3 \phi_C - (D_1 + D_2 + D_3) \phi_P + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} + S_\phi \Delta \Omega \quad (3.28c)$$



รูปที่ 3.7 จำลองการไหลเข้าออกของเซลล์ P

วิธีผลต่างด้นลม เป็นการประมาณ ค่า ϕ บนแต่ละด้าน ของเซลล์ (ϕ_i) โดยพิจารณาจากทิศทางการไหลผ่าน ด้านนั้น ๆ สำหรับกรณีเซลล์ 2 มิติ ดังรูปที่ 3.7 ความเร็วที่ด้าน $i=1$ และ $i=2$ มีทิศทางพุ่ง ออกจากเซลล์ P ส่วนที่ด้าน $i=3$ ความเร็วมีทิศทางพุ่งเข้าหาเซลล์ P จากสมการที่ (3.26) จะได้

$$\phi_1 = \phi_P \quad (3.29a)$$

$$\phi_2 = \phi_P \quad (3.29b)$$

$$\phi_3 = \phi_C \quad (3.29c)$$

ค่าที่ได้ตามสมการที่ (3.29) เมื่อนำมาแทนค่าลงในสมการที่ (3.28) ได้

$$\begin{aligned} \dot{m}_1\phi_P + \dot{m}_2\phi_P + \dot{m}_3\phi_C \\ = D_1\phi_A + D_2\phi_B + D_3\phi_C - (D_1 + D_2 + D_3)\phi_P + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} + S_\phi\Delta\Omega \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2 + D_3 + \dot{m}_1 + \dot{m}_2 - \Delta\dot{m} + \Delta\dot{m})\phi_P \\ = D_1\phi_A + D_2\phi_B + (D_3 - \dot{m}_3)\phi_C + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} + S_\phi\Delta\Omega \end{aligned} \quad (3.30b)$$

จากนั้นจัดสมการให้อยู่ในรูปค่าสัมประสิทธิ์ตามโหนดจะได้

$$a_P\phi_P = a_A\phi_A + a_B\phi_B + a_C\phi_C + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} + S_\phi\Delta\Omega \quad (3.31)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_A &= D_1 + \max(0, -\dot{m}_1) \\ a_B &= D_2 + \max(0, -\dot{m}_2) \\ a_C &= D_3 + \max(0, -\dot{m}_3) \\ a_P &= a_A + a_B + a_C \end{aligned}$$

จาก สมการที่ (3.8) พจน์การพาซึ่งมีการดำเนินการโปรดัคต์ระหว่างเวกเตอร์ของความเร็วที่ด้านและทิศทางพุ่งออกตั้งฉากด้าน ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ความเร็วที่พุ่งออกตั้งฉากด้าน แต่เนื่องจาก เวกเตอร์ความเร็วของแต่ละเซลล์ในรูปแบบของกริดร่วม (Colocated Grid) ซึ่งค่าตัวแปร จะถูกเก็บไว้ที่โหนด กลางของเซลล์ ดังนั้นการหาคุณสมบัติที่ด้านจึงต้องอาศัย การเฉลี่ย

จากโหนดกลางของเซลล์ อย่างไรก็ตามการเฉลี่ย จากโหนดกลาง แบบเชิงเส้นตามปกติจะส่งผลให้เกิดความไม่เสถียร ภาพในการคำนวณ ซึ่งเป็นผลกระทบจากพฤติกรรมที่เรียกว่า “ผลกระทบตรวจสอบ (Checker Board Effect)” โดยมักเกิดขึ้นเมื่อใช้กริดร่วมในการคำนวณ เพื่อลดผลกระทบดังกล่าว Rhie and Chow (1983) ได้นำเสนอรูปแบบการประมาณค่า ความเร็ว ที่ด้านโดยใช้ผล ของเกรเดียนต์ของความดันในแนวตั้งฉากด้านเข้ามารวมด้วย ดังนี้

$$v_{n,e} = \overline{v_e} \cdot n_e - \left(\frac{\Delta \Omega}{a_p} \right)_e \left(\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_e^{old} \right) \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_e &= \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_e + \left[\overline{(grad p)}_e \cdot (n_e - \hat{i}_{\xi,e}) \right]^{old} \\ \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_e} &= \hat{n}_e \cdot \overline{(grad p)}_e \\ \overline{\psi} &= \alpha \psi_p + (1-\alpha) \psi_A, \quad \psi \text{ คือ ตัวแปรที่สนใจ} \\ \alpha &= L_{Af} / L_{PA} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการประมาณค่าความเร็วที่ด้านจากผลของเกรเดียนต์ของความดันในแนวเชื่อมโหนดได้ดังนี้

$$v_{n,e} = \overline{v_e} \cdot n_e - \left(\frac{\Delta \Omega}{a_p} \right)_e \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_e - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_e^{old} \right) \quad (3.33)$$

3.3.3 สมการความดันแก้ไข

ในการแก้ปัญหาค่าไหล 2 มิติ แบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ จะมีตัวแปรการคำนวณทั้งหมด 3 ตัว คือ ความเร็วในแนว x และ y (u, v) และความดัน (p) โดยที่ความเร็ว u และ v สามารถหาค่าได้จากการแก้สมการโมเมนตัม x และ y ส่วนการหาค่าความดันนั้นไม่มีสมการที่ใช้แก้โดยตรง แต่จากสมการควบคุม ค่าความดันปรากฏในพจน์แหล่งกำเนิดของสมการโมเมนตัม ดังนั้นเพื่อให้ได้สมการสำหรับใช้แก้หาความดัน จึงได้นำสมการความต่อเนื่องมาประยุกต์เข้ากับการประมาณค่าความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็ว (Pressure and Velocity Coupling) โดยอาศัยแนวคิดของสมการแก้ไข ดังสมการนี้

$$u = u^* + u' \quad (3.34a)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.34b)$$

$$p = p^* + p' \quad (3.34c)$$

เมื่อ u = ค่าแม่นยำตรงของความเร็วทิศทาง x

v = ค่าแม่นยำตรงของความเร็วทิศทาง y

p = ค่าแม่นยำตรงของความดัน

ตัวยก (*) = ค่าประมาณ

ตัวยก (') = ค่าค่าแก้ไข

นั่นคือ ค่าแม่นยำตรง มีค่าเท่ากับค่าประมาณบวกกับค่าแก้ไข ด้วยแนวคิดดังกล่าว สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็วมุมทิศทาง x ด้วยการแทนค่าใน สมการโมเมนตัม สมการที่ (3.31) เมื่อ ϕ คือ ความเร็ว u ดังนี้

$$a_p u_p = \sum_{i=1}^3 a_{nb} u_{nb} + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i} - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta \Omega_p \quad (3.35a)$$

$$a_p (u_p^* + u_p') = \sum_{i=1}^3 a_{nb} (u_{nb}^* + u_{nb}') + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i}^* + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i}' - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \Delta \Omega_p \quad (3.35b)$$

$$a_p u_p' = \left[\sum_{i=1}^3 a_{nb} u_{nb}^* - a_p u_p^* + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i}^* - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \Delta \Omega_p \right] + \sum_{i=1}^3 a_{nb} u_{nb}' + \sum_{i=1}^3 S_{d-cross,i}' - \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \Delta \Omega_p \quad (3.35c)$$

จากสมการที่ (3.35c) เมื่อผลเฉลยเข้าสู่ค่าตอบพจน์ค่าแก้ไขทุกพจน์จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ และพจน์ค่าประมาณจะเข้าสู่ค่าแม่นยำตรง ส่งผลให้พจน์ที่อยู่ในวงเล็บใหญ่ คือ การดุลสมการโมเมนตัมมีค่า

เข้าสู่ศูนย์ และพจน์ $\sum_{i=1}^3 a_{nb} u'_{nb}$ และ $\sum_{i=1}^3 S'_{d-cross,i}$ ก็เข้าสู่ศูนย์เช่นกัน แต่เนื่องจากต้องการหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็ว ดังนั้นพจน์เกรเดียนต์ความดัน ค่าแก้ไข $\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_p$ และพจน์ความเร็วค่าแก้ไข (u'_p) จะไม่ถูกกำหนดให้เท่ากับศูนย์

$$a_p u'_p = - \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_p \Delta \Omega_p \quad (3.36a)$$

$$u'_p = - \left(\frac{\Delta \Omega_p}{a_p} \right) \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_p \quad (3.36b)$$

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างความดัน ค่าแก้ไข กับความเร็ว ค่าแก้ไข ทิศทาง y สามารถหาได้ด้วยหลักการเดียวกัน จะได้ความสัมพันธ์เป็นดังนี้

$$v'_p = - \left(\frac{\Delta \Omega_p}{a_p} \right) \left(\frac{\partial p'}{\partial y} \right)_p \quad (3.37)$$

เมื่อได้ความสัมพันธ์ระหว่างความดันค่าแก้ไขกับความเร็วค่าแก้ไขแล้ว นำไปแทนค่าลงในสมการความต่อเนื่อง สมการ ที่ (3.3) ซึ่งจะเห็นว่า มีเพียงพจน์การพา การอินทิเกรตสมการดังกล่าวตลอด ผิวควบคุม จะได้ความสัมพันธ์ในรูปแบบการสมดุลฟลักซ์ของมวล ที่ด้านของเซลล์ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i v_{n,i} = 0 \quad (3.38)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ ที่ได้เกี่ยวข้องกับ ความเร็วที่ตั้งฉากด้าน ($v_{n,i}$) ซึ่งการหาค่าความเร็วดังกล่าวจะอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความดันค่าแก้ไขกับความเร็วค่าแก้ไข ดังนี้

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{V}' = (u^* + u')\hat{i} + (v^* + v')\hat{j} \quad (3.39a)$$

$$v_{n,i} = \overline{(\vec{V}^*)}_i \cdot \hat{n}_i + \overline{(\vec{V}')}_i \cdot \hat{n}_i \quad (3.39b)$$

$$v_{n,i} = v_{n,i}^* + v'_{n,i} \quad (3.39c)$$

$$v'_{n,i} = \overline{(u'\hat{i} + v'j)}_i \cdot (n_{x,i}\hat{i} + n_{y,i}j) \quad (3.39d)$$

$$v'_{n,i} = -\left(\overline{\frac{\Delta\Omega_P}{a_P}}\right)_i \left[\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_i \cdot n_{x,i}\hat{i} + \left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)_i \cdot n_{y,i}j \right] \quad (3.39e)$$

$$v'_{n,i} = -\left(\overline{\frac{\Delta\Omega_P}{a_P}}\right)_i \left(\frac{\partial p'}{\partial n}\right)_i \quad (3.39f)$$

เมื่อ $v_{n,i}^*$ เป็นค่าประมาณของความเร็วที่ด้านสามารหาได้จาก เทคนิคของ Rhie, and Chow (1983) ตามสมการที่ (3.33) ส่วนการประมาณค่าที่ด้านของสัมผัสปริมาตรและ เซลล์ $((\Delta\Omega_P/a_P)_i)$ จะถูกประมาณค่าแบบเชิงเส้น ซึ่งอธิบายในภาคผนวก ก.3

แทนค่าสมการที่ (3.39c) ลงในสมการที่ (3.38) จะได้

$$\sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i (v_{n,i}^* + v'_{n,i}) = 0 \quad (3.40a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i v'_{n,i} + \sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i v_{n,i}^* = 0 \quad (3.40b)$$

เมื่อ $\dot{m}_i^* = \rho \Delta S_i v_{n,i}^*$ จะได้

$$\sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i v'_{n,i} + \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i^* = 0 \quad (3.40c)$$

แทนค่าสมการที่ (3.40c) ด้วยสมการที่ (3.39f) จะได้

$$\sum_{i=1}^3 \rho \Delta S_i \left(- \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_i \left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_i \right) + \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i^* = 0 \quad (3.40d)$$

$$\text{เมื่อ } \left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_i = \frac{p'_A - p'_P}{L_{PA}} + \left[\left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial p'}{\partial \xi} \right)_i \right]^{old}$$

ประยุกต์สมการดังกล่าวจนครบทั้ง 3 ด้านของเซลล์ แล้วจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \rho \Delta S_1 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_1 \left(\frac{p'_A - p'_P}{L_{PA}} \right) + \rho \Delta S_2 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_2 \left(\frac{p'_B - p'_P}{L_{PB}} \right) + \\ & \rho \Delta S_3 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_3 \left(\frac{p'_C - p'_P}{L_{PC}} \right) + \sum_{i=1}^3 S_{p-cross,i} = \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i^* \end{aligned} \quad (3.40e)$$

$$\text{เมื่อ } S_{p-cross,i} = \frac{p'_A - p'_P}{L_{PA}} + \left[\left(\frac{\partial p'}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial p'}{\partial \xi} \right)_i \right]^{old}$$

จัดรูปสมการที่ (3.40e) ใหม่ให้อยู่รูปทั่วไปได้ดังนี้

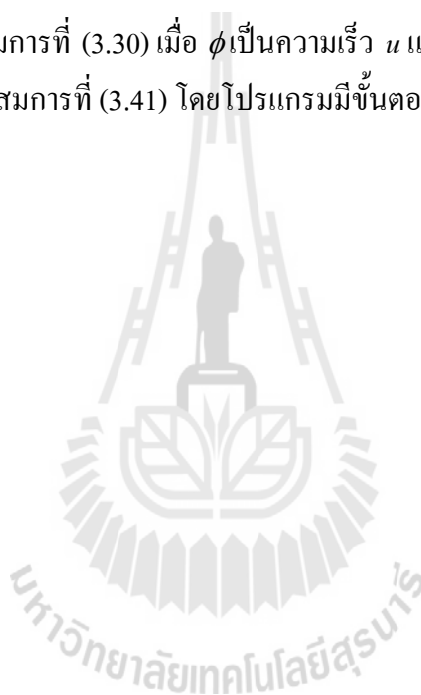
$$a_p^{p'} p'_P = a_A^{p'} p'_A + a_B^{p'} p'_B + a_C^{p'} p'_C + \sum_{i=1}^3 S_{p-cross,i} - \sum_{i=1}^3 \dot{m}_i^* \quad (3.41)$$

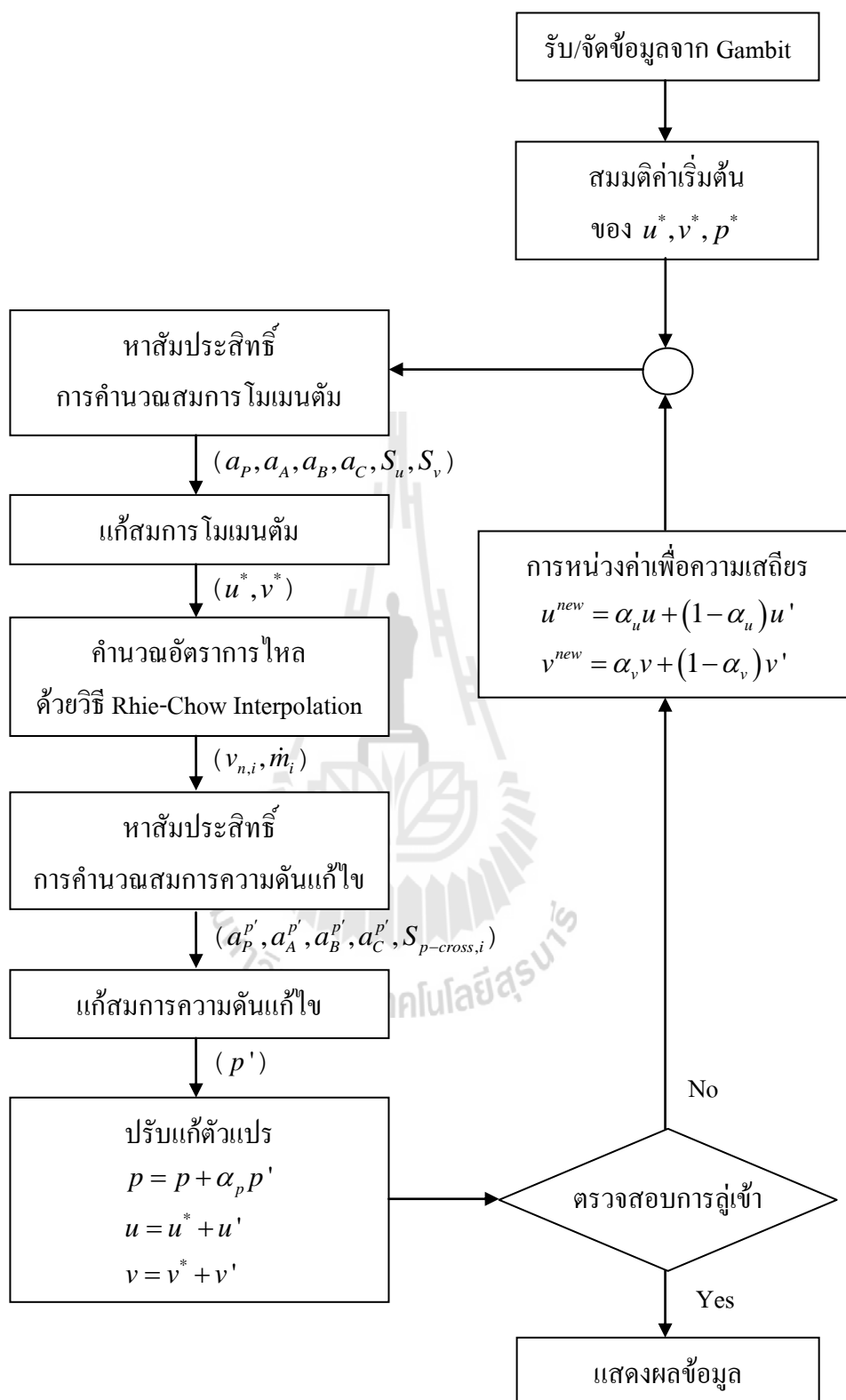
$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } a_A^{p'} &= \frac{\rho \Delta S_1 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_1}{L_{PA}} \\ a_B^{p'} &= \frac{\rho \Delta S_2 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_2}{L_{PB}} \\ a_C^{p'} &= \frac{\rho \Delta S_3 \left(\frac{\Delta \Omega}{a_P} \right)_3}{L_{PC}} \\ a_p^{p'} &= a_A^{p'} + a_B^{p'} + a_C^{p'} \end{aligned}$$

สมการความดันแก้ไขที่ใช้แก้หาค่าความดันแก้ไข (p') เพื่อนำค่าไปแก้ไขค่าตัวแปรต่าง ๆ ตามสมการที่ (3.34c) แต่มีการคูณค่าหน่วยการคำนวณ ค่าความดันแก้ไข (α_p) เพื่อให้การคำนวณมีความเสถียร โดยที่ P มากกว่าศูนย์จนถึงหนึ่ง ดังนั้นจะได้ว่า

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (3.42)$$

ดังนั้นการแก้ปัญหาคาร์ไล 2 มิติ แบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ ซึ่งมีตัวแปร 3 ตัว คือ ความเร็วในแนว x และ y และความดัน โดยความเร็วในแนว x และ y ได้มาจากการแก้สมการโมเมนตัม x และ y ตามสมการที่ (3.30) เมื่อ ϕ เป็นความเร็ว u และ v ตามลำดับ และหาค่าความดันผ่านค่าความดันแก้ไขตามสมการที่ (3.41) โดยโปรแกรมมีขั้นตอนการคำนวณแสดงในรูปที่ 3.8





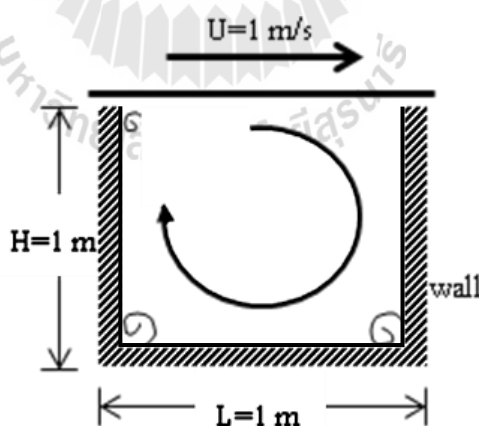
รูปที่ 3.8 แผนภาพขั้นตอนการแก้ปัญหการไหล

3.4 การทดสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

การทดสอบความน่าเชื่อถือของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะเริ่มจากปัญหาการไหลที่มีรูปทรงไม่ซับซ้อน ได้แก่ ปัญหาการไหลในโพรง การไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน และการไหลผ่าน หน้าตัดขยายทันที โดยแต่ละปัญหาถูกใช้เพื่อทดสอบโปรแกรมในเงื่อนไขขอบต่าง ๆ เมื่อมีความน่าเชื่อถือพอแล้วจากนั้น โปรแกรมจะถูกนำไปทดสอบกับปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนมากขึ้นในปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยวและปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอกที่วางเรียงกัน รายละเอียดการทดสอบของแต่ละปัญหาเป็นดังนี้

3.4.1 ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 m มีเงื่อนไขทั้งหมดเป็นแบบผนัง โดยผนังด้านบน เคลื่อนได้จากซ้ายไปขวาด้วยความเร็ว $U = 1$ m/s ส่วนผนังด้านอื่นเป็นผนังหยุดนิ่ง ค่าเลขเรย์โนลด์ ของการไหล นี้คำนวณได้จาก $Re = \rho UH/\mu$ ปัญหาการไหลนี้ขียนนำมาทดสอบโปรแกรมเพื่อประเมินการจำลองลักษณะการไหลที่จะเกิด ซึ่งมี 2 ลักษณะ คือ การไหลแบบหมุนวนหลักและการหมุนวนรอง โดยการหมุนวนหลักเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิกาขนาดใหญ่และเกิดบริเวณส่วนกลางของโดเมน ส่วนการหมุนวนรองเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกาขนาดเล็กเกิดขึ้นที่มุมล่างของโดเมนและเมื่อการไหลมีค่าเลขเรย์โนลด์สูง ๆ จะเกิดการหมุนรองที่มุมบนซ้ายของโดเมนด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3.9

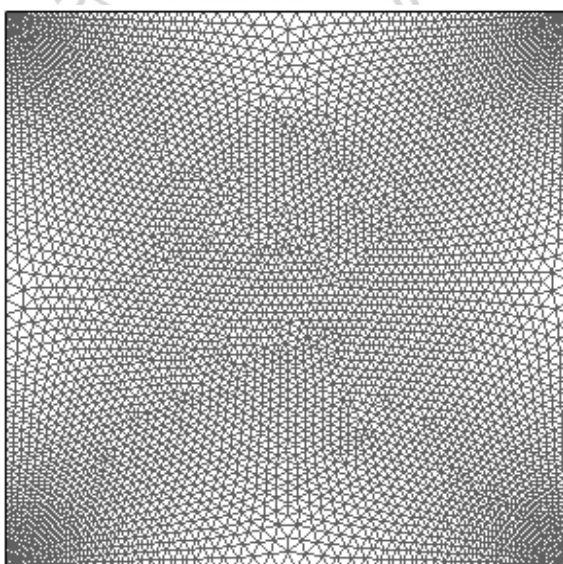


รูปที่ 3.9 ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ปัญหานี้มีการวิเคราะห์กันอย่างแพร่หลาย เช่น งานวิจัยของ Ghia et al (1982) ซึ่งใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์พฤติกรรมการไหลแบบราบเรียบที่อัดตัวไม่ได้ในสภาวะคงตัวที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 100 400 1,000 3,200 และ 5,000 ดังนั้นการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับปัญหานี้จึงใช้ค่าเลขเรย์โนลด์ดังกล่าวเพื่อเปรียบเทียบลักษณะการไหล โดยกำหนดคุณสมบัติของของไหลตามตารางที่ 3.1 แต่ผลการคำนวณจะถูกเปรียบเทียบกับเฉพาะผลที่ได้จากโปรแกรม Fluent เนื่องจากงานวิจัยของ Ghia et al นั้นใช้กริดโครงสร้างแบบสี่เหลี่ยม ทำให้พิกัดโหนดไม่ตรงกันจึงยากต่อการเปรียบเทียบ สำหรับในการทดสอบนี้ใช้ กริดแบบสามเหลี่ยม ขนาด 8,274 เซลล์ ดังรูปที่ 3.10

ตารางที่ 3.1 การกำหนดคุณสมบัติของของไหลตามค่าเลขเรย์โนลด์สำหรับปัญหาการไหลในโพรง

ค่าเลขเรย์โนลด์ (Re)	ความหนาแน่น (ρ , kg/m ³)	สัมประสิทธิ์ความหนืด (μ , kg/m.s)
100	1	0.01
400	4	0.01
1,000	1	0.001
3,200	3.2	0.001
5,000	1	0.0002



รูปที่ 3.10 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส

3.4.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน

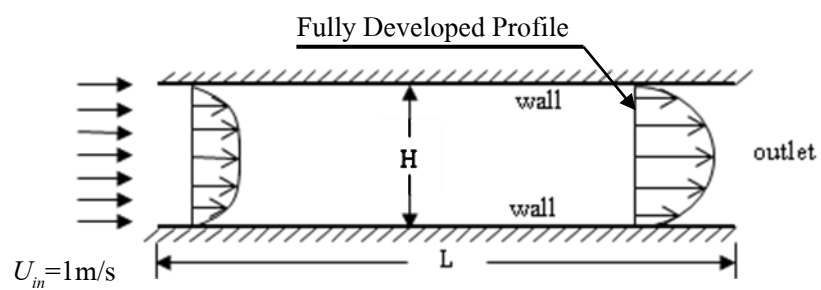
ปัญหาการไหล ระหว่างแผ่น ระนาบคู่ขนาน ลักษณะของปัญหา ประกอบด้วย เงื่อนไขขอบทางเข้า ทางออก และ ขอบบนและล่างเป็น ผัน โดยกำหนดให้ ทางเข้ามีความเร็ว $U_{in} = 1 \text{ m/s}$ ระบายยาว 10 m วางห่างกัน 1 m ดังแสดงในรูปที่ 3.11(a) ปัญหานี้มักใช้ทดสอบ ความสามารถของโปรแกรมในการจำลองการไหลที่ประกอบด้วยเงื่อนไขขอบหลายแบบ ส่วน ลักษณะการไหลที่สนใจคือโปรไฟล์ของการไหลที่พัฒนาเต็มขั้น (Fully Developed Profile) เพราะมี ผลเฉลยแม่นยำตรงให้เปรียบเทียบได้ดังนี้

$$u(y) = \frac{3}{4} \frac{q}{h} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (3.43)$$

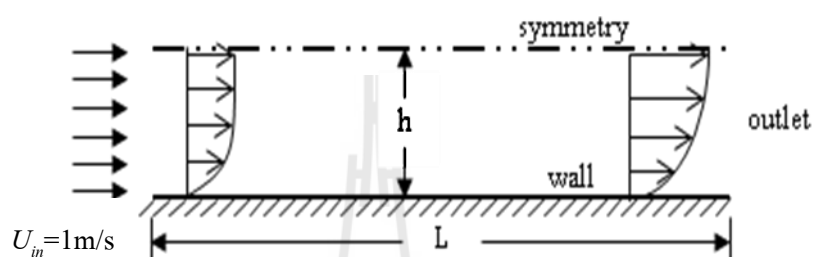
เมื่อ q = อัตราการไหลของของไหลซึ่งเท่ากับ AU_{in} โดยที่ A เป็นพื้นที่หน้าตัดทางเข้า $= H \times 1$
 h = ความกว้างครึ่งหนึ่งของระยะระหว่างระนาบ $= H/2$
 y = ระยะที่วัดจากแกนสมมาตรไปยังผนังด้านล่าง
 u = ผลเฉลยความเร็วที่ระยะความสูง y ใด ๆ

อย่างไรก็ตามโปรไฟล์ดังกล่าวจะเกิดขึ้นในช่วงท้ายของระนาบ โดยระยะการเกิด จะแปรตรงกับค่าเลขเรย์โนลด์ ซึ่งในปัญหานี้สามารถหาค่าได้จาก $Re = \rho U_{in} H / \mu$ เมื่อเลขเรย์โนลด์มี ค่าสูง โปรไฟล์ของการไหลที่พัฒนาเต็มขั้นจะเกิดขึ้น ห่างจากปากทางเข้า ในทางกลับกันเมื่อ เลข เรย์โนลด์มีค่าต่ำ การเกิด โปรไฟล์ก็จะเข้าใกล้ทางเข้าด้วย แต่หากกำหนดความยาวระนาบน้อย เกินไปก็จะไม่สามารถตรวจจับ โปรไฟล์ดังกล่าวได้ เพื่อให้การไหลเกิดโปรไฟล์ดังกล่าว จึงได้ กำหนดเลขเรย์โนลด์ให้มีค่าน้อย ๆ คือ $Re = 1$

อย่างไรก็ตามเนื่องจากรูปทรงปัญหามีความสมมาตรบนล่าง ดังนั้นการวิเคราะห์จึง ตัดมาเพียงครึ่งสมมาตรเดียวได้ดัง แสดงในรูปที่ 3.11(b) ในการวิเคราะห์ได้กำหนดให้ ความหนาแน่นและความหนืดของของไหลเท่ากับ 1 kg/m^3 และ 1 kg/m.s ตามลำดับ ส่วน กริดที่ใช้มี ขนาด 915 เซลล์ ตามรูปที่ 3.12

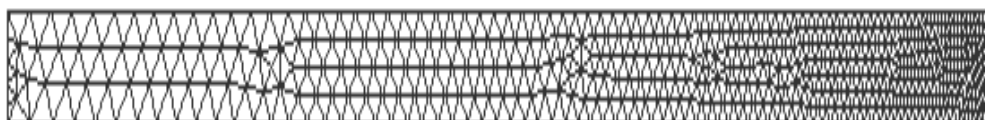


(a)



(b)

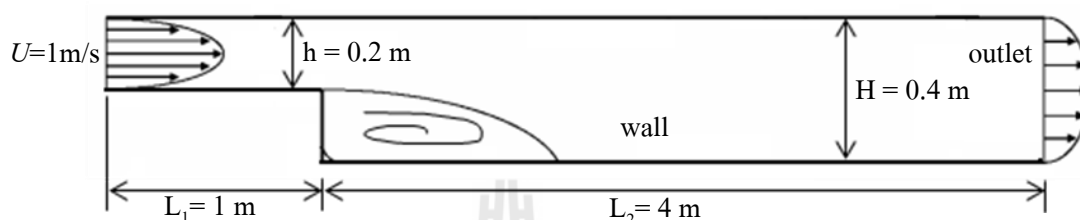
รูปที่ 3.11 (a) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน และ
(b) โดเมนของปัญหาที่วิเคราะห์



รูปที่ 3.12 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน

3.4.3 ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

ปัญหาการไหลผ่าน หน้าตัดขยายทันที จะคล้ายกรณีการไหลระหว่างแผ่น ระบายคู่ขนานเพียงแต่ช่องมีการเปลี่ยนขนาดพื้นที่หน้าตัดอย่างทันที ปัญหานี้กำหนดเงื่อนไขขอบตามตารางที่ 3.2 ขนาดของโดเมนที่ทางเข้าสูง $h = 0.2 \text{ m}$ เป็นระยะ $L_1 = 1 \text{ m}$ และเปลี่ยนความสูง แบบขั้นบรรไดอยู่ที่ $H = 0.4 \text{ m}$ เป็นระยะ $L_2 = 4 \text{ m}$ ดังรูปที่ 3.13

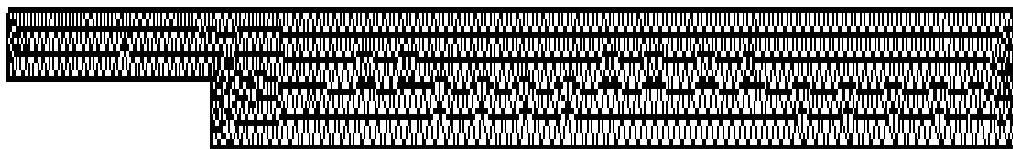


รูปที่ 3.13 ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

ตารางที่ 3.2 เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

ขอบ	ชนิดเงื่อนไขขอบ	รายละเอียดของเงื่อนไข
ขอบบน	ผนัง	$u = v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบล่าง	ผนัง	$u = v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบซ้าย	ทางเข้าด้วยความเร็ว	$U = 1 \text{ m/s}$, $v = 0$ และ $\partial p / \partial x = 0$
ขอบขวา	ทางออก	$(\partial \phi / \partial x = 0)$ เมื่อ $\phi = u, v$ และ p

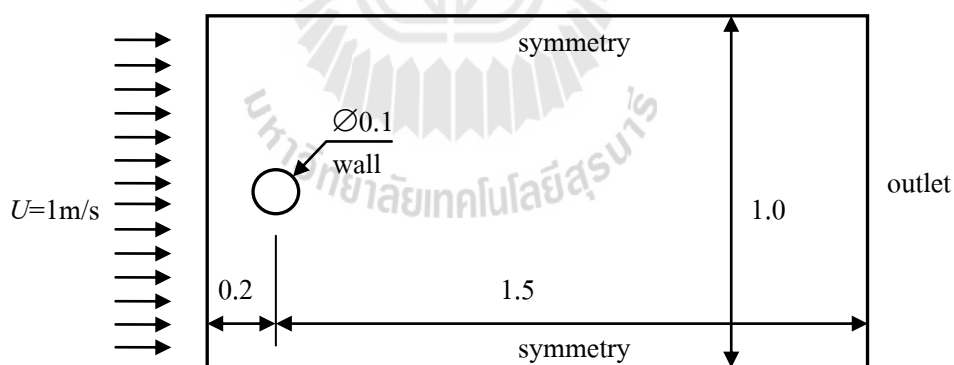
ปัญหาการไหลนี้ถูกใช้ทดสอบโปรแกรมด้วยลักษณะการไหลที่เกิดการหมุนวน ภายหลังจากที่หน้าตัดขยายทันที ซึ่งการไหลแบบนี้สามารถทำให้การคำนวณขาดเสถียรภาพ สำหรับการวิเคราะห์ในที่นี้ได้กำหนดค่า ความหนาแน่นและความหนืดของของไหลเท่ากับ 100 kg/m^3 และ 1 kg/m.s ตามลำดับ เพื่อให้ได้ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 40 ซึ่งหาได้จาก $Re = \rho U H / \mu$ โดยกริดที่ใช้มีขนาด 1,114 เซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 3.14 และผลการคำนวณจะถูกนำไปเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent



รูปที่ 3.14 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

3.4.4 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว เป็นการจำลองการไหลแบบภายนอก (External Flow) กล่าวคือกระแสการไหลจะไหล โดยรอบผิววนนอกของวัตถุ การวิเคราะห์หาค่าสัมประสิทธิ์การสร้างความเค้นเฉือนบนผิวของวัตถุไว้ ขอบของโดเมนจะต้องมีระยะห่างจากผิวทรงกระบอกพอสมควร เพื่อให้ได้ผลลัพธ์จากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดจากกระแสการไหลน้อยที่สุด เนื่องจากเงื่อนไขขอบทางออกและขอบสมมาตรใช้เงื่อนไขเกรเดียนต์ทิศทาง x และ y เท่ากับศูนย์ ปัญหานี้เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.1 m ถูกล้อมด้วยโดเมนรูปสี่เหลี่ยมขนาด $1.7 \times 1.0 \text{ m}$ โดยจุดศูนย์กลางทรงกระบอกห่างจากขอบซ้าย 0.2 m และห่างจากขอบบนและล่าง 0.5 m ดังแสดงในรูปที่ 3.15 และมีเงื่อนไขขอบดังแสดงในตารางที่ 3.3

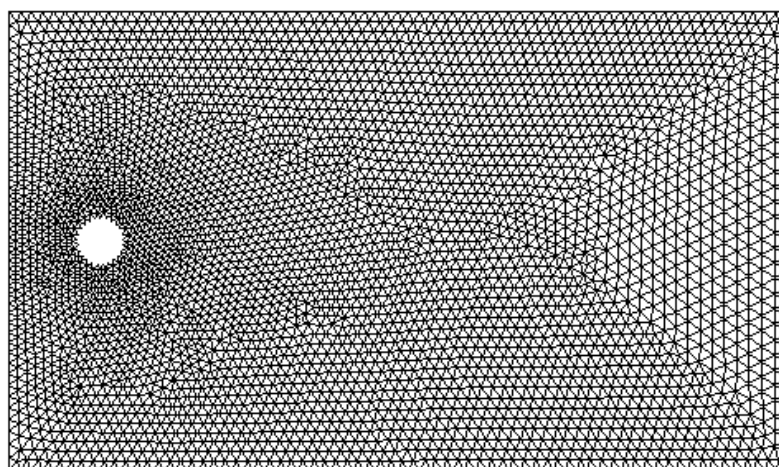


รูปที่ 3.15 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

ตารางที่ 3.3 เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

ขอบ	ชนิดเงื่อนไขขอบ	รายละเอียดของเงื่อนไข
ขอบบน	สมมาตร	$\partial u / \partial y = 0$, $v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบล่าง	สมมาตร	$\partial u / \partial y = 0$, $v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบซ้าย	ทางเข้าด้วยความเร็ว	$U = 1 \text{ m/s}$, $v = 0$ และ $\partial p / \partial x = 0$
ขอบขวา	ทางออก	$(\partial \phi / \partial x = 0)$ เมื่อ $\phi = u, v$ และ p
ขอบวงกลม	ผนัง	$u = v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$

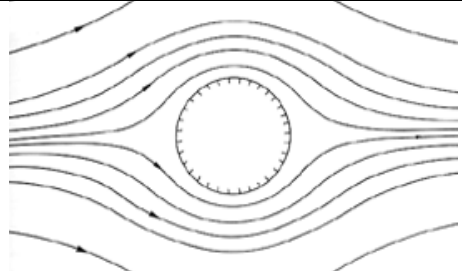
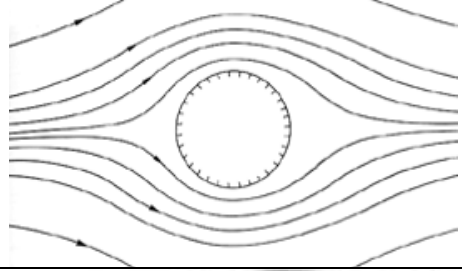
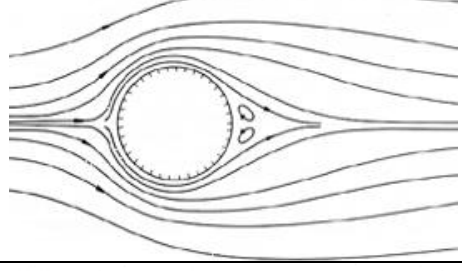

ปัญหานี้พิจารณาการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ $Re = \rho U D / \mu = 30$ เมื่อกำหนดความเร็วทาง เข้า $U = 1 \text{ m/s}$ ความหนาแน่นและความหนืดของของไหล มีค่าเท่ากับ 300 kg/m^3 และ 1 kg/m.s ตามลำดับ กริดที่ใช้มีขนาด 7,370 เซลล์ ดังรูปที่ 3.16 และกริดถูกสร้างให้หนาแน่นที่บริเวณใกล้ผิวทรงกระบอก ส่วนผลการคำนวณจะนำไปเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent



รูปที่ 3.16 กริดที่ใช้กับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

ลักษณะการไหลผ่านทรงกระบอกมีพฤติกรรมตามค่าเลขเรย์โนลด์ ซึ่งแสดงในตารางที่ 3.4 สำหรับปัญหานี้ใช้ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 30 ดังนั้นการไหลที่จะเกิดขึ้นตามทฤษฎีจะมีการหมุนวนอยู่ด้านหลังทรงกระบอก และมีลักษณะสมมาตรบนล่างกัน

ตารางที่ 3.4 ลักษณะการไหลผ่านทรงกระบอกในค่าเลขเรย์โนลด์ต่าง ๆ

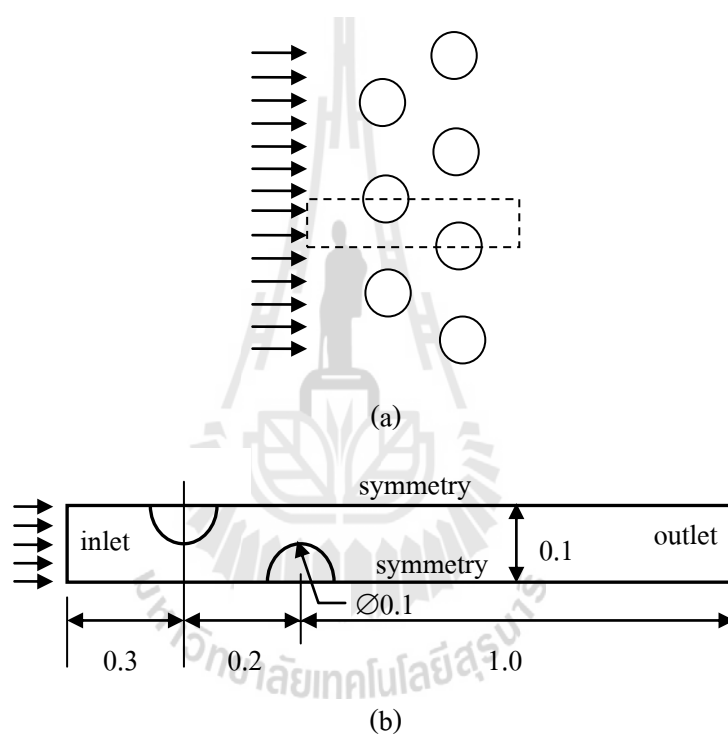
$Re \ll 1$		ลักษณะการไหลมีความสมมาตรทั้งหน้า/หลัง บน/ล่างของทรงกระบอก
$Re < 4$		ลักษณะการไหลมีความสมมาตรบน/ล่าง แต่ระยะปะทะด้านหน้าสั้นกว่าระยะรวมตัวด้านหลัง
$4 < Re < 40$		ลักษณะการไหลยังมีความสมมาตรบน/ล่าง แต่จะเกิดการหมุนวนที่ด้านหลังทรงกระบอก
$40 < Re < 400$		ค่า Re ที่มากกว่าค่าวิกฤต ประมาณ 40 จะเกิดการสั่นของการหมุนวนด้านหลังทรงกระบอกด้วยความถี่คงที่

แหล่งที่มา: <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/CD0102/travaux/optmfn/gpfmho/01-02/grp1/>

phy_know.htm

3.4.5 ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก เป็นปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันกับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว แต่มีความซับซ้อนมากกว่า จากรูปที่ 3.17(a) ทรงกระบอกเรียงซ้อนและวางเอียง กันเป็น 2 แถว ขวามันต์ เมื่อพิจารณาจะพบว่าปัญหามีความสมมาตรตามแนวขวาง ครึ่งหนึ่งของทรงกระบอกที่อยู่ชิดกัน ดังแสดงด้วยกรอบสี่เหลี่ยม ยมเส้นประในรูปที่ 3.17(a) ดังนั้น โดเมนปัญหานี้จึงมีลักษณะดังรูปที่ 3.17(b) และเงื่อนไขขอบของโดเมนมีรายละเอียดตามตารางที่ 3.5



รูปที่ 3.17 (a) ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก และ
(b) โดเมนปัญหาที่วิเคราะห์

ตารางที่ 3.5 เงื่อนไขของปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

ขอบ	ชนิดเงื่อนไขขอบ	รายละเอียดของเงื่อนไข
ขอบบน	สมมาตร	$\partial u / \partial y = 0, v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบล่าง	สมมาตร	$\partial u / \partial y = 0, v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$
ขอบซ้าย	ทางเข้าด้วยความเร็ว	$U = 1 \text{ m/s}, v = 0$ และ $\partial p / \partial x = 0$
ขอบขวา	ทางออก	$(\partial \phi / \partial x = 0)$ เมื่อ $\phi = u, v$ และ p
ขอบส่วนของวงกลม	ผนัง	$u = v = 0$ และ $\partial p / \partial y = 0$

ปัญหานี้พิจารณาการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 30 เช่นเดียวกับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว โดยกำหนดให้ความหนาแน่นและความหนืดของของไหลเท่ากับ 300 kg/m^3 และ 1 kg/m.s กริดที่ใช้ขนาด 2,069 เซลล์ ดังรูปที่ 3.18 และผลการคำนวณจะนำไปเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent



รูปที่ 3.18 กริดของปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก



บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการอภิปรายผล

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมเพื่อวิเคราะห์การไหลใน 2 มิติ โปรแกรมที่ถูกเขียนขึ้นนี้จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับปัญหาดังนี้

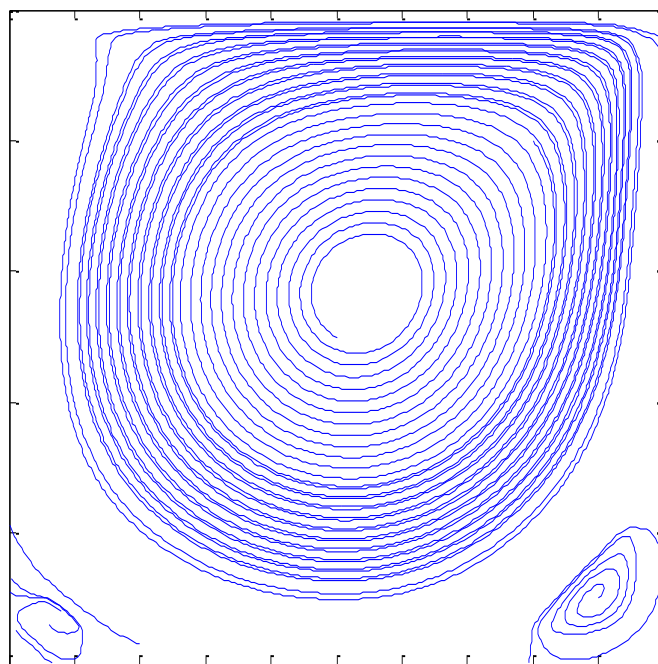
- ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน
- ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที
- ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว
- ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

4.1 ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส

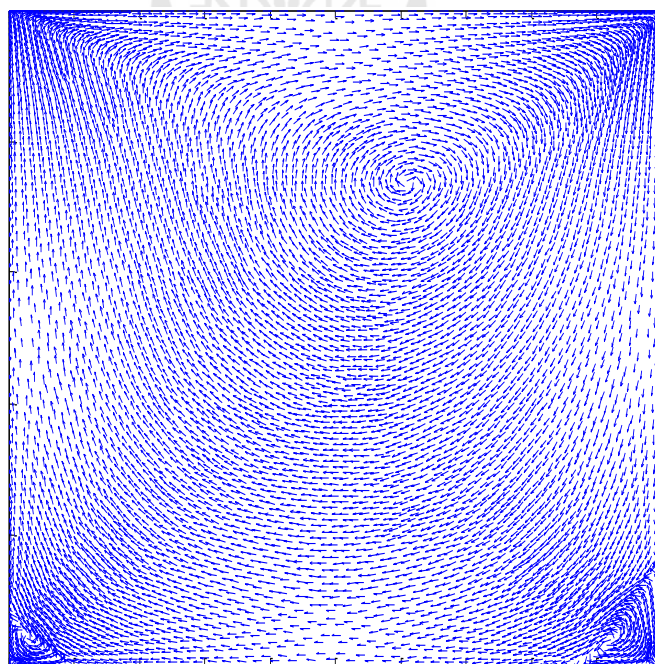
ปัญหาการไหลในโพรงเป็นการไหลภายใต้เงื่อนไขผนัง ซึ่งผนังด้านบนสามารถเลื่อนจากซ้ายไปขวาด้วยความเร็ว 1 m/s ได้ ส่วนผนังด้านอื่นจะอยู่นิ่ง โดเมนปัญหา ตามรูปที่ 3.9 ถูกนำมาสร้างกริดด้วยกริดสามเหลี่ยมขนาด 8,274 เซลล์ ดังรูปที่ 3.10

พฤติกรรมของของไหลในโพรง เมื่อได้รับการเหนี่ยวนำจากผนังที่เลื่อนจากซ้ายไปขวา รวมถึงผลของความหนืดของของไหลนั้น ทำให้เกิดลักษณะ การหมุนวนเข้าสู่ใจกลาง ของโดเมนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา การหมุนวนนี้ถูกเรียกว่าการหมุนวนหลัก

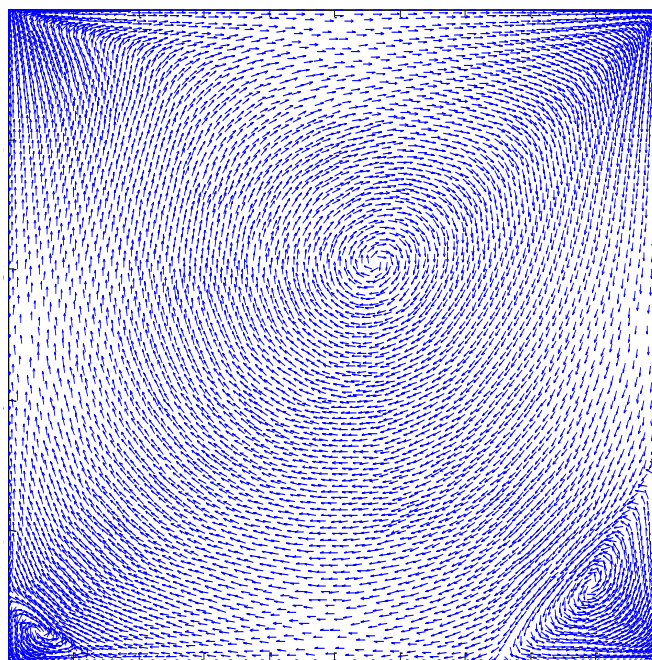
นอกจากนี้ยังเกิดการหมุนวนขนาดเล็กที่มุมล่างทั้งสองของโดเมนปัญหา ตามตำแหน่งในรูปที่ 4.1 การหมุนวนมีทิศทางเข็มนาฬิกา โดยถูกเรียกว่าการหมุนวนรอง ซึ่งเกิดขึ้นจากลักษณะของโดเมนที่เป็นเหลี่ยมมุมและการหมุนวนหลักที่ใกล้เคียงผนังเกิดการตกกระทบ แล้วแยกตัวหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและของไหลบริเวณนี้ไม่สามารถหมุนวนเข้าสู่การหมุนวนหลัก ได้เนื่องจากมีขนาดของความเร็วต่ำกว่ากลุ่มการหมุนวนหลัก และที่ค่าเลขเรย์โนลด์สูง ๆ การหมุนวนรองจะเกิดขึ้นที่มุมซ้ายบนของโดเมนด้วย



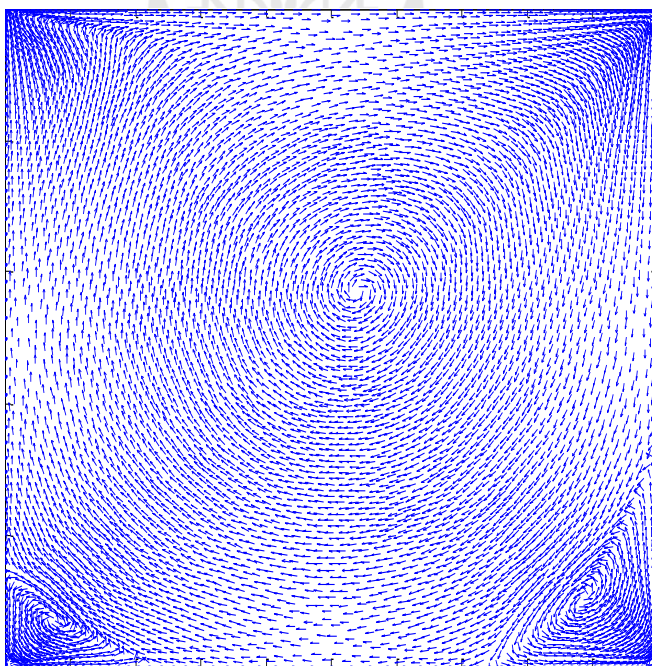
รูปที่ 4.1 ลักษณะการหมุนวนของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส



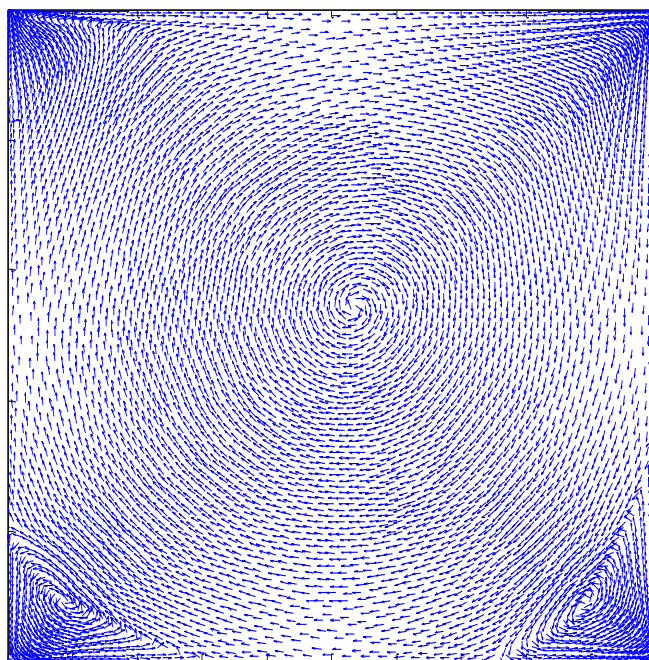
รูปที่ 4.2 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 100$



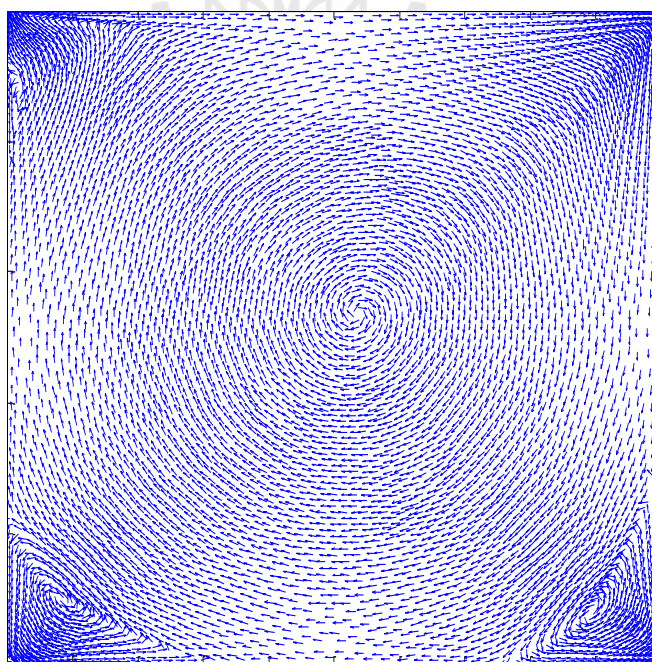
รูปที่ 4.3 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 400$



รูปที่ 4.4 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 1,000$



รูปที่ 4.5 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 3,200$



รูปที่ 4.6 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลในโพรงที่ $Re = 5,000$

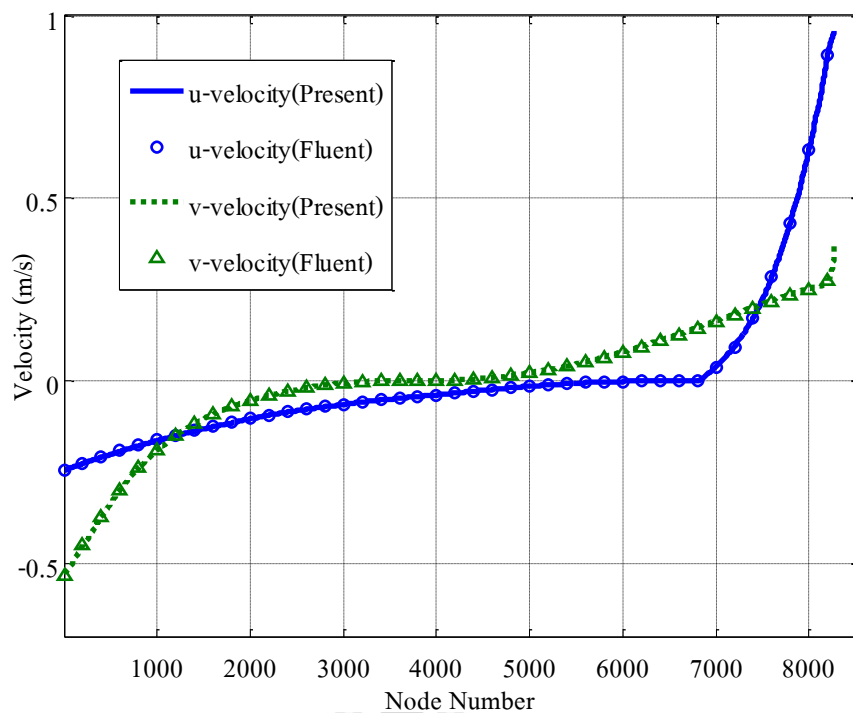
รูปที่ 4.2-4.5 เป็นผลการคำนวณของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น จะเห็นว่าโปรแกรมสามารถคำนวณลักษณะการไหลได้ทั้งการหมุนวนหลักและการหมุนวนรองที่มุมล่างทั้งสองของโดเมน และที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 5,000 จะเกิดการหมุนวนรองที่มุมซ้ายบนของโดเมนด้วย ดังรูปที่ 4.6 เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์มากขึ้น ตำแหน่งจุดศูนย์กลางการหมุน จะเริ่มเข้าใกล้จุดกึ่งกลางของโดเมนปัญหา โดยมีตำแหน่งตามตารางที่ 4.1 ซึ่งเป็นผลมาจากค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดที่ลดลง และความหนาแน่นที่มากขึ้น หมายถึง เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดลดลง ความสามารถในการเหนี่ยวนำของไหลใกล้เคียงให้เคลื่อนที่ตามได้มากขึ้น ดังนั้นผลจากการเลื่อนของผนังด้านบน จึงส่งถึงได้ระยะที่ไกลกว่าเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดลดลง และเมื่อความหนาแน่นมากขึ้น จะทำให้เกิดโมเมนตัมมากขึ้นกว่าแรงต้านจากความหนืดได้

นอกจากนั้นเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์มากขึ้น ขนาดของการหมุนวนรองจะใหญ่ขึ้น เนื่องจากเหตุผลเดียวกันคือ แรงต้านจากความหนืดที่ลดลงและโมเมนตัมที่มากขึ้น ทำให้การหมุนวนรองขยายพื้นที่ได้

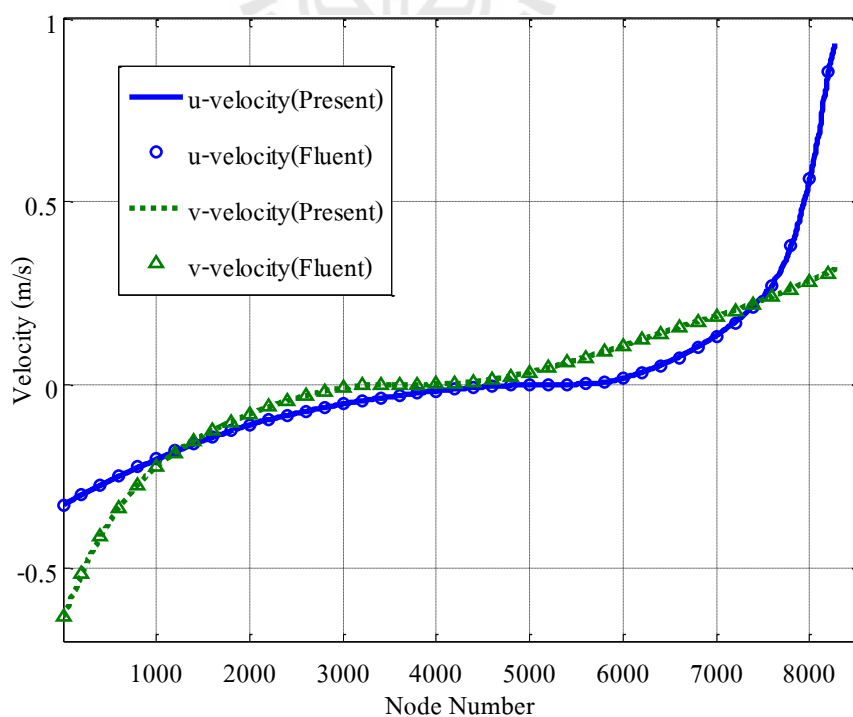
ตารางที่ 4.1 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของการหมุนวนหลัก

เลขเรย์โนลด์ (Re)	ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของการหมุนวนหลัก	
	x	y
100	0.60	0.74
400	0.55	0.61
1,000	0.53	0.57
3,200	0.53	0.55
5,000	0.52	0.53

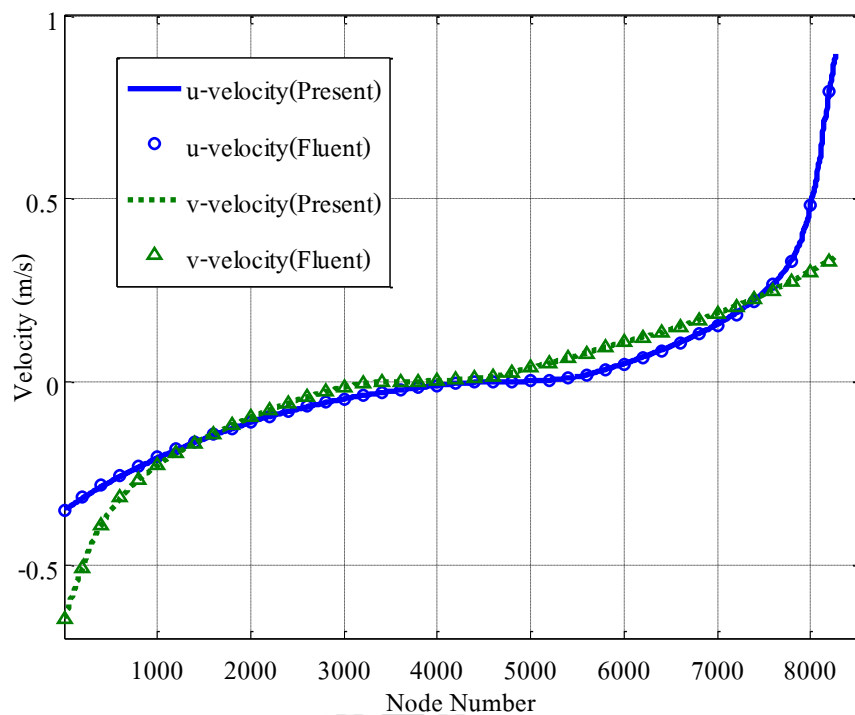
ผลการคำนวณของปัญหานี้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent ผลที่ได้มีความใกล้เคียงกันมากตามที่แสดงในรูปที่ 4.7-4.11



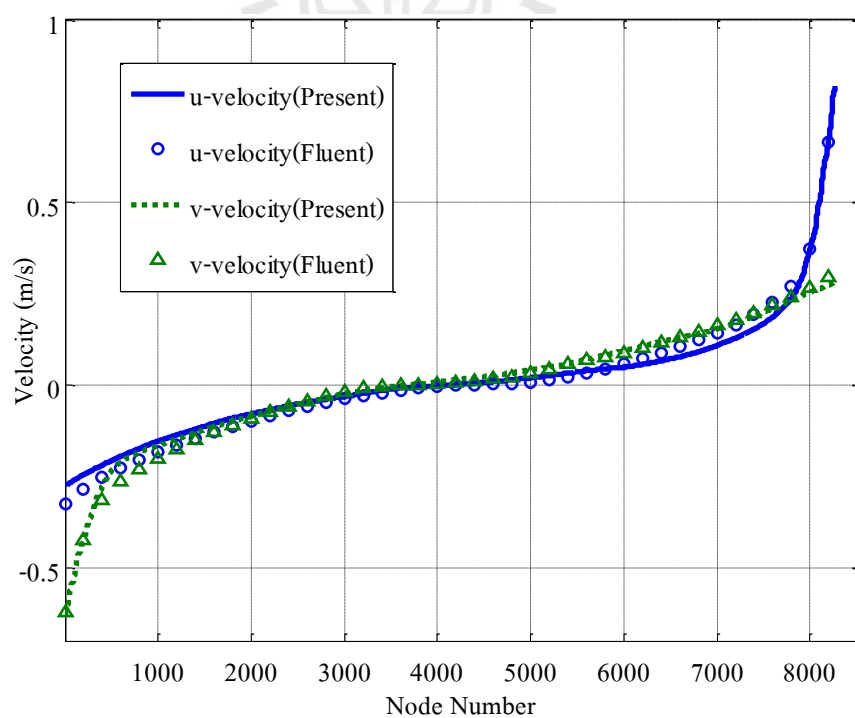
รูปที่ 4.7 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 100$



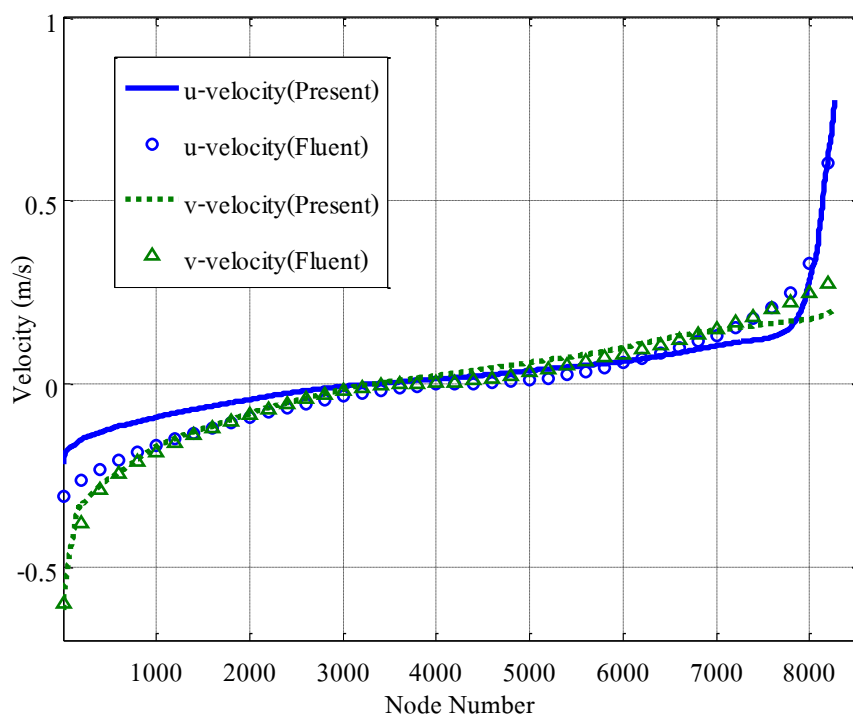
รูปที่ 4.8 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 400$



รูปที่ 4.9 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 1,000$



รูปที่ 4.10 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 3,200$



รูปที่ 4.11 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $Re = 5,000$

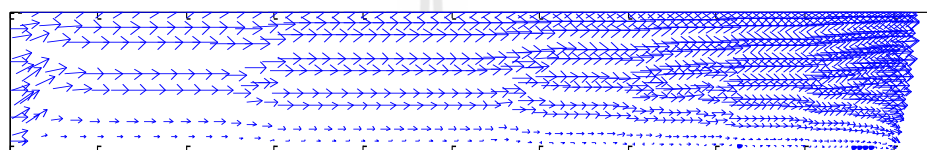
ตารางที่ 4.2 แสดงผลต่างมากที่สุดของผลจากโปรแกรมที่พัฒนามกับโปรแกรม Fluent

ค่าเลขเรย์โนลด์ (Re)	ผลต่างมากที่สุด ของความเร็ว u (m/s)	ผลต่างมากที่สุด ของความเร็ว v (m/s)
100	0.0050	0.0265
400	0.0067	0.0251
1,000	0.0040	0.0056
3,200	0.0450	0.0543
5,000	0.1154	0.0848

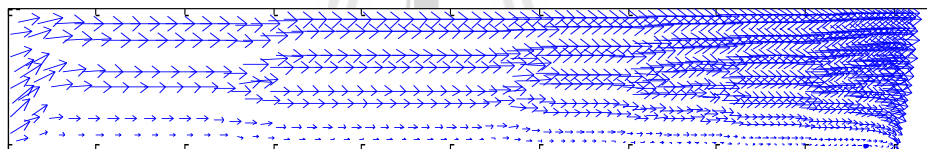
จากตารางที่ 4.2 เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น ผลเปรียบเทียบก็ ต่างมากขึ้น เพราะที่ค่าเลขเรย์โนลด์สูงจะเกิดโมเมนตัมสูงขึ้นเกิดการหมุนวนที่แรงขึ้นและทำให้การคำนวณของโปรแกรมที่พัฒนานี้กว้างมากขึ้น และอาจเป็นที่เทคนิคการเก็บข้อมูลและการคำนวณยังไม่เสถียรกับปัญหาที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูง ๆ

4.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน

ปัญหาการไหลในท่อเป็นปัญหาที่ใช้ทดสอบเงื่อนไขขอบประเภท ทางเข้า ทางออก และ สมมาตร ใช้เงื่อนไขสมมาตรได้เพราะจากรูปที่ 3.11(b) ปัญหาการไหลในท่อมี่รูปร่างและเงื่อนไขที่ สมมาตรกันในแนวยาว โดเมนปัญหานี้มีความสูงจากแนวสมมาตร 0.5 m ยาว 10 m ใช้กริดแบบ สามเหลี่ยมจำนวน 915 เซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 3.12 และพิจารณาการไหลในช่วงค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 1 เมื่อความเร็วที่ทางเข้า $U_{in} = 1 \text{ m/s}$ ดังนั้น ความหนาแน่นและความหนืดของของไหล เท่ากับ 1 kg/m^3 และ 1 kg/ms



(a)



(b)

รูปที่ 4.12 เวกเตอร์ความเร็วของการไหล

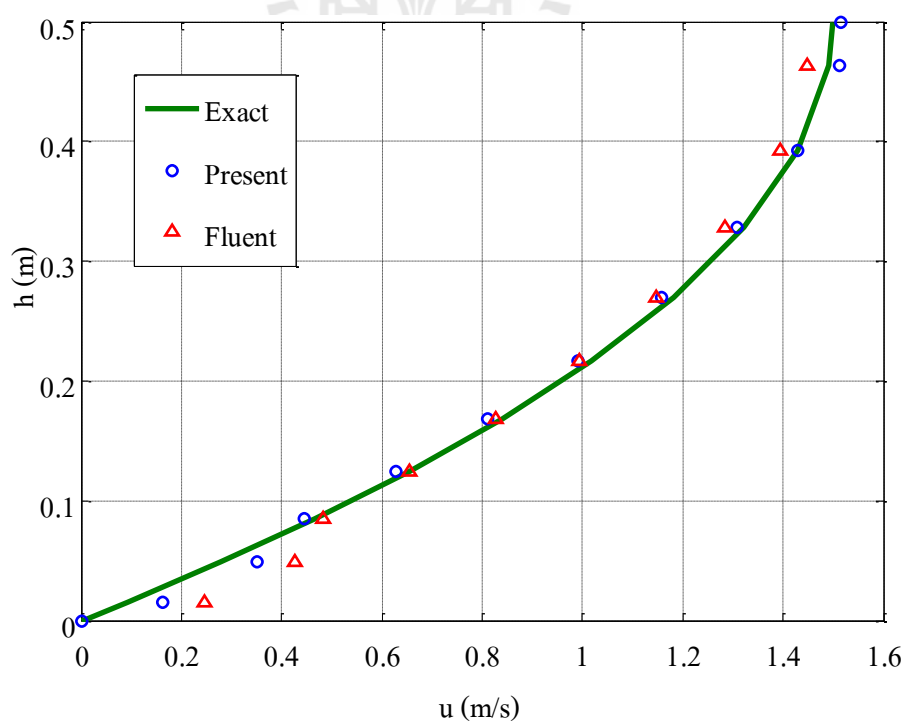
(a) ผลจากโปรแกรมที่พัฒนา และ

(b) ผลจาก Fluent

ผลการคำนวณจากโปรแกรมที่พัฒนามีลักษณะคล้ายกับผลของโปรแกรม Fluent มาก และ ที่ทางออกมีลักษณะการไหลแบบเต็มรูปซึ่งสามารถเปรียบเทียบค่าจากผลเฉลยแน่นอนตรงได้ ได้ผลดัง ตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.13

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบผลการคำนวณความเร็ว u ที่ทางออก

ผลเฉลย (m/s)	ผลจากโปรแกรมนี้ (m/s)	ผลจาก Fluent (m/s)	ผลต่างโปรแกรมนี้ กับผลเฉลย (m/s)	ผลต่างFluent กับผลเฉลย (m/s)
0.0926	0.1619	0.2452	0.0693	0.1526
0.2776	0.3498	0.4262	0.0722	0.1486
0.4660	0.4452	0.4839	0.0208	0.0179
0.6550	0.6277	0.6549	0.0273	0.0001
0.8409	0.8112	0.8261	0.0297	0.0148
1.0188	0.9908	0.9926	0.0280	0.0262
1.1822	1.1587	1.1470	0.0235	0.0352
1.3229	1.3079	1.2827	0.0150	0.0402
1.4305	1.4292	1.3949	0.0013	0.0356
1.4918	1.5132	1.4482	0.0214	0.0436



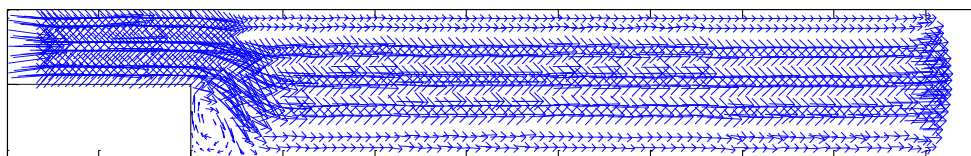
รูปที่ 4.13 ผลเปรียบเทียบความเร็วที่ทางออกของการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน

จากตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.13 จะเห็นว่าผลที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมาก และใกล้เคียง มากกว่าผลที่ได้จากโปรแกรม Fluent แต่ในช่วงที่ใกล้กับเงื่อนไขผนังจะมีความต่างมากกว่าช่วงอื่น ๆ เนื่องจากเป็นช่วงที่มีการเปลี่ยนความเร็วมากที่สุด ผลการคำนวณที่ได้มีความผิดพลาดมากที่สุด แสดงให้เห็นว่าวิธีการประมาณค่าที่ใช้ยังมีความไม่เหมาะสมอยู่ เพราะวิธีนี้คำนึงถึงเพียงผลกระทบของการที่เส้นเชื่อมโหนดไม่ตั้งฉากกับด้านเท่านั้น โดยไม่คำนึงถึงจุดตัดกับด้านที่เกิดขึ้น เมื่อจุดตัดดังกล่าวอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางด้านมากขึ้น ความถูกต้องในการคำนวณก็จะลดลงตาม

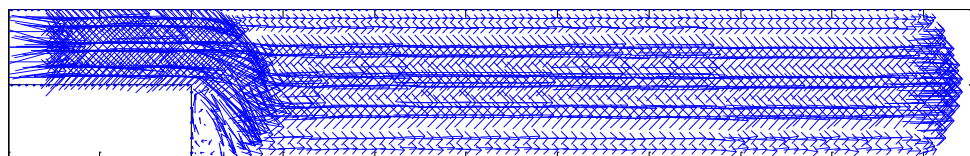
4.3 ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีจะมีความคล้ายกับปัญหาการไหลในท่อ แต่จะมีการเปลี่ยนขนาดหน้าตัดขยายทันที ดังนั้นลักษณะการไหลที่เกิดขึ้นจะมีการไหลแบบเต็มรูปและการตกกระทบเมื่อหน้าตัดเปลี่ยนไป โดเมนปัญหามีเงื่อนไขขอบเป็นทางเข้า ทางออก และผนัง โดเมนมีขนาดหน้าตัดเท่ากับ 0.2 m ก่อนที่จะเปลี่ยนเป็นหน้าตัดขนาด 0.4 m และเงื่อนไขทางเข้าถูกกำหนดให้เป็นความเร็ว $U = 1 \text{ m/s}$ ตามรูปที่ 3.13 เมื่อความหนาแน่นและความหนืดของของไหล มีค่าเท่ากับ 100 kg/m^3 และ 1 kg/ms จะได้ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 40 และวิเคราะห์ด้วยกริดแบบสามเหลี่ยมขนาด 1,114 เซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 3.14

จากรูปที่ 4.14 และ 4.15 จะเห็นว่าลักษณะการไหลจากผลการคำนวณจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความคล้ายกับผลของโปรแกรม Fluent ลักษณะการไหลเกิดการไหลแบบเต็มรูป เกิดการตกกระทบและหมุนวนเมื่อผ่านหน้าตัดขยายทันที โดยเกิดจุดตกกระทบที่พื้นระยะ x ประมาณ 1.2 m

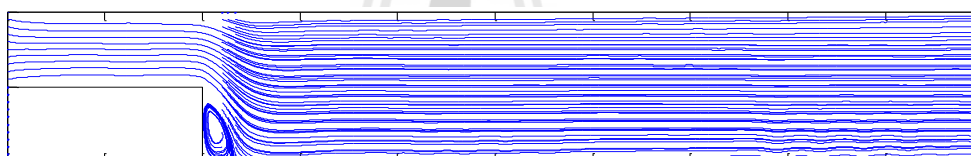


(a)

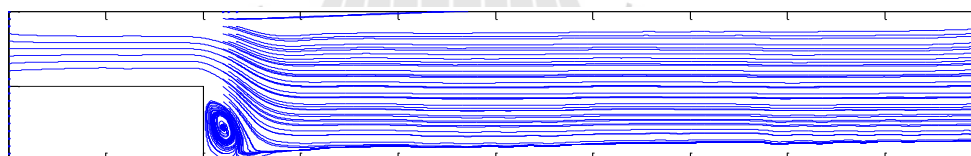


(b)

รูปที่ 4.14 เวกเตอร์การไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีจาก
(a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent

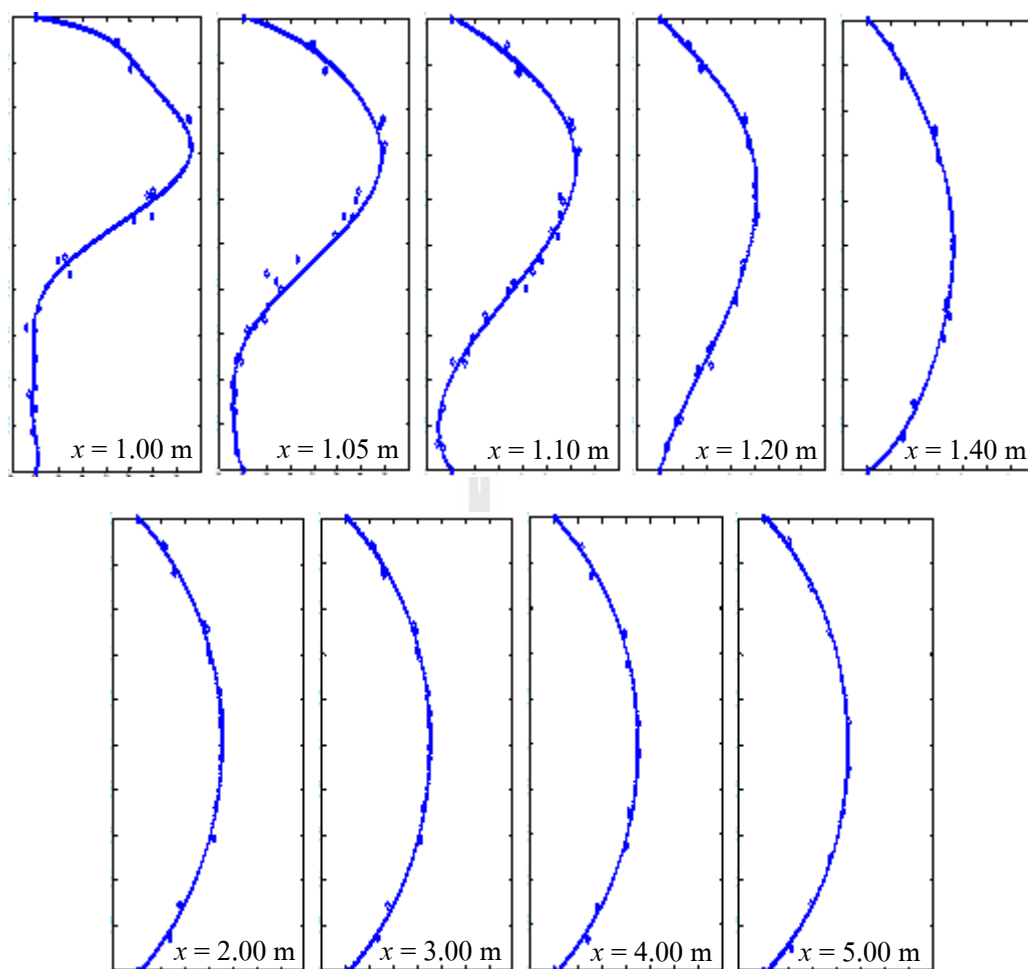


(a)



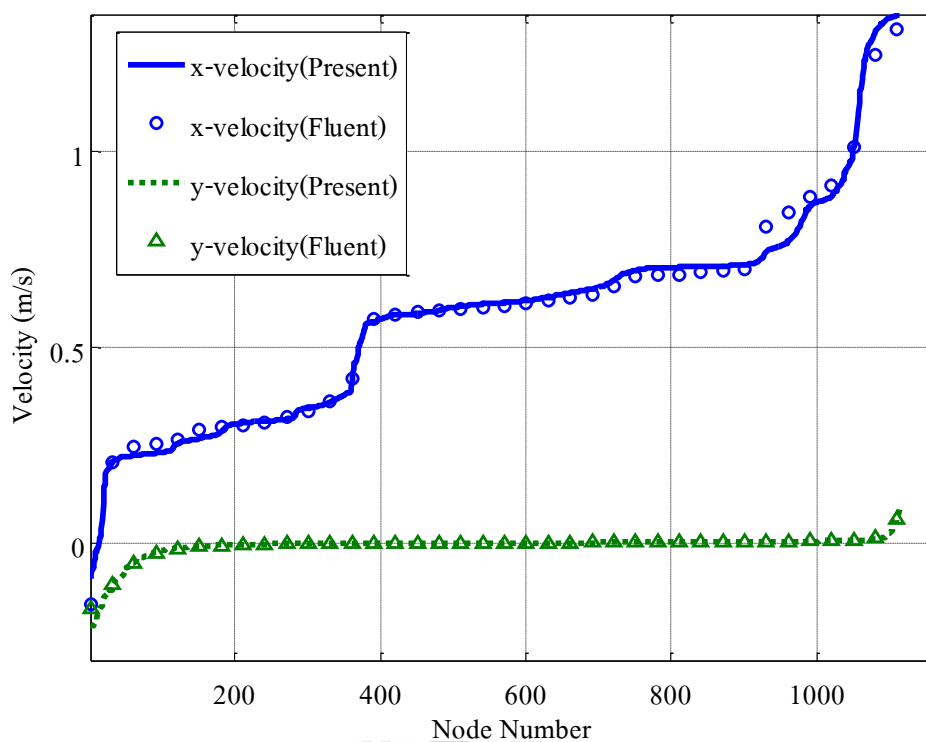
(b)

รูปที่ 4.15 เส้นการไหลของการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีจาก
(a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent



รูปที่ 4.16 โปรไฟล์ความเร็ว u ที่หน้าตัดระยะ x ต่าง ๆ

จากรูปที่ 4.16 แสดงโปรไฟล์ของความเร็ว u ในหน้าตัดระยะต่าง ๆ จะเห็นว่าระยะก่อนระยะ 1.2 m เกิดการไหลย้อนกลับซึ่งเป็นระยะที่เกิดการหมุนวน และในระยะตั้งแต่ 1.2 m เป็นต้นไป โปรไฟล์มีลักษณะของการไหลเต็มรูปแบบ

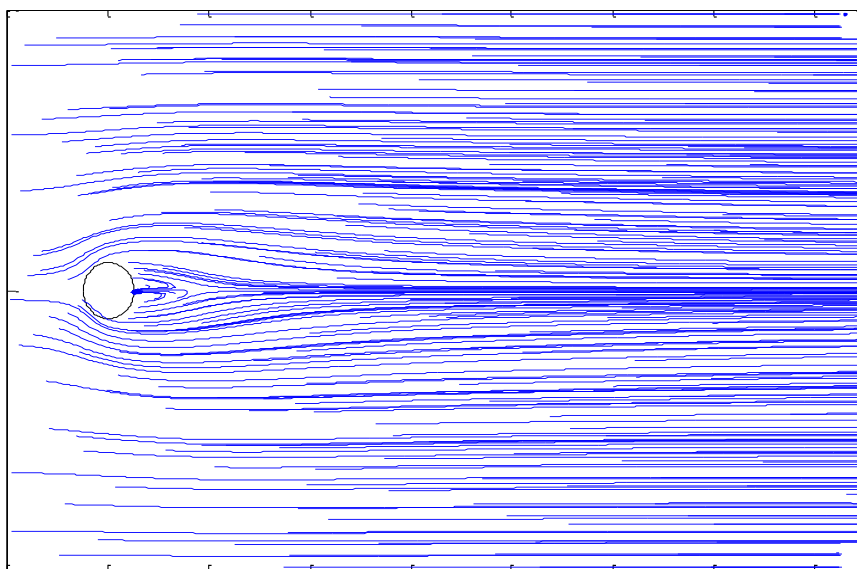


รูปที่ 4.17 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที

จากรูปที่ 4.17 แสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับโปรแกรม Fluent มีค่าใกล้เคียงกัน โดยมีผลต่างมากที่สุดของความเร็ว u เท่ากับ 0.0906 m/s และผลต่างมากที่สุดของความเร็ว v เท่ากับ 0.0578 m/s

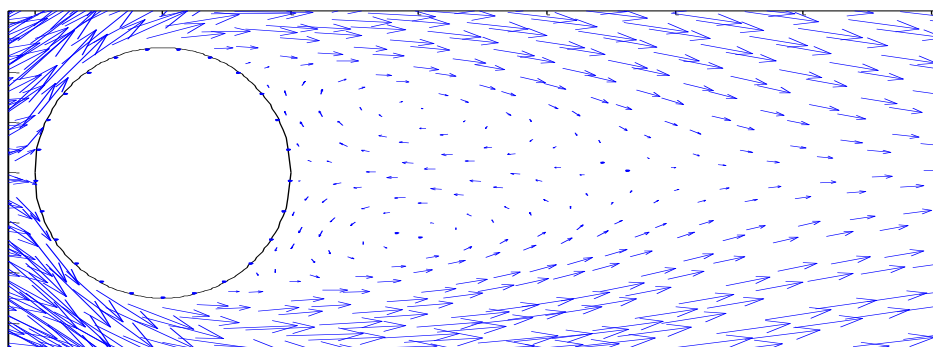
4.4 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว ขวเริ่มเป็นปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนขึ้น และเป็นการทดสอบแรกสำหรับปัญหาการไหลผ่านผิวภายนอกรูปทรงปัญหา (External Flow) โดยลักษณะของโดเมนมีขนาดดังแสดงในรูปที่ 3.15 ใช้กริดแบบสามเหลี่ยมจำนวน 7,370 เซลล์ ดังรูปที่ 3.16 ปัญหานี้พิจารณาการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 30

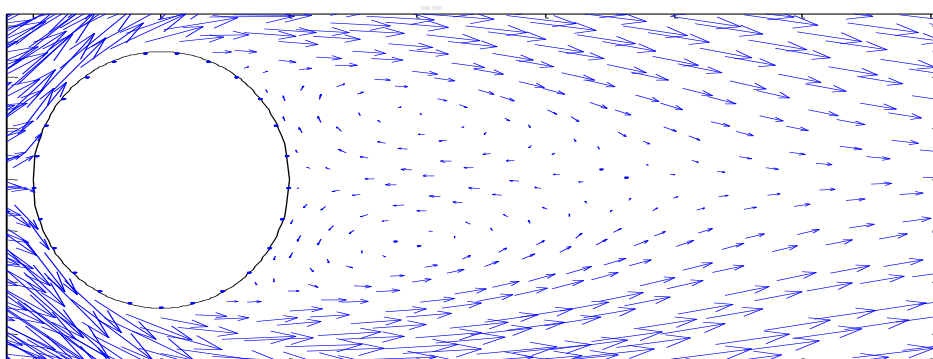


รูปที่ 4.18 เส้นการไหลของการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

จากรูปที่ 4.18 และ 4.19 จะเห็นว่าลักษณะการไหลผ่านทรงกระบอกนี้มีความเป็นสมมาตรบนล่างกัน และเกิดการหมุนวนด้านหลังทรงกระบอกเป็นไปตามตารางที่ 3.4 โดยลักษณะการไหลจะเริ่มจากการปะทะที่ด้านหน้าทรงกระบอกทำให้ความดันสูงเร่งให้ความเร็วสูงขึ้นความดันลดลงตามผิวด้านหน้าทรงกระบอก และความเร็วเริ่มลดลงความดันเริ่มสูงขึ้นจากจุด B C และ D ตามรูปที่ 4.20 ซึ่งเมื่อเกรเดียนต์ของความเร็วเข้าไปใกล้ศูนย์จะเกิดจุดแยกตัว (Separated Point) และเกิดการย้อนกลับของความเร็วเนื่องจากความดันที่สูงขึ้นทำให้เกิดการหมุนวนด้านหลังของทรงกระบอก



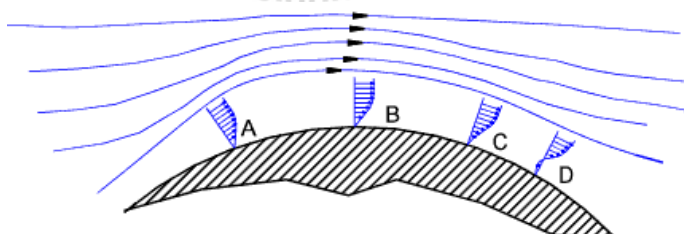
(a)



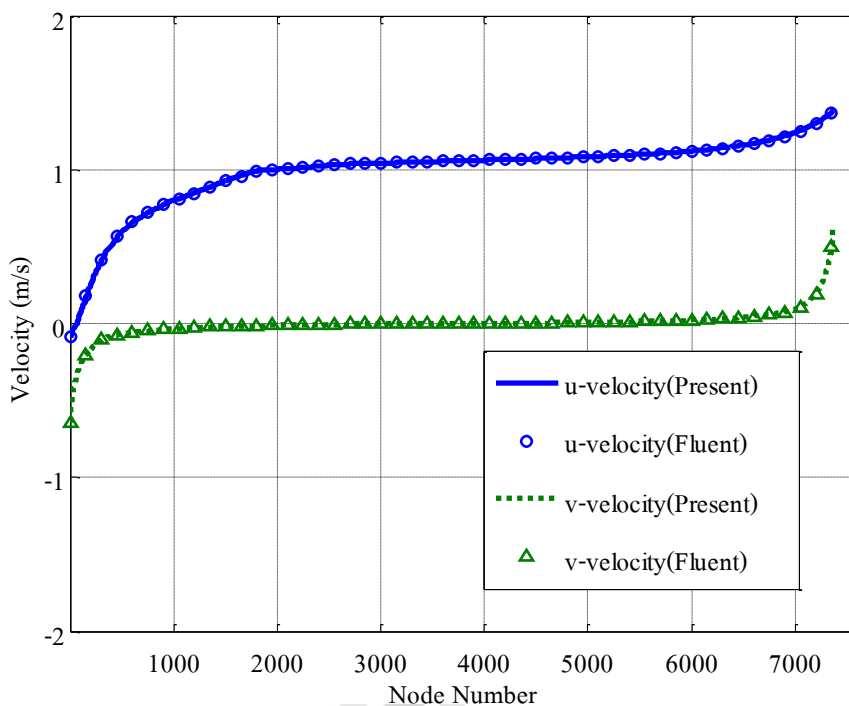
(b)

รูปที่ 4.19 ภาพขยายลักษณะการไหลหลังทรงกระบอกเดี่ยว

(a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้น และ (b) Fluent



รูปที่ 4.20 ลักษณะการเกิดการหมุนวนด้านหลังทรงกระบอก (Beardmore, R., 2008)



รูปที่ 4.21 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว

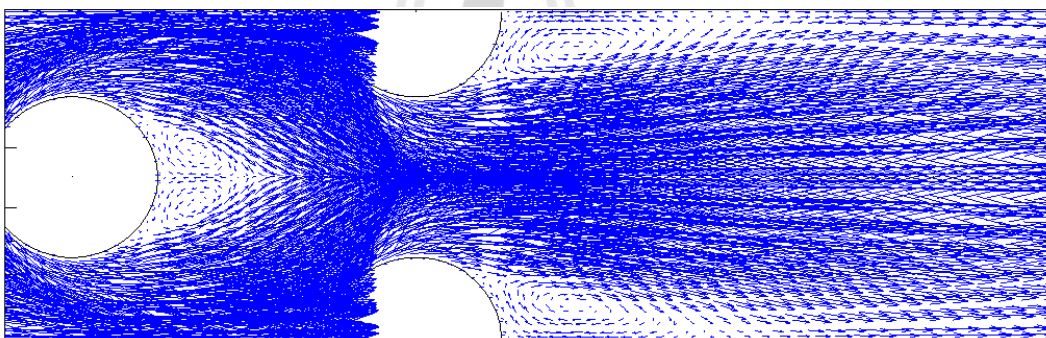
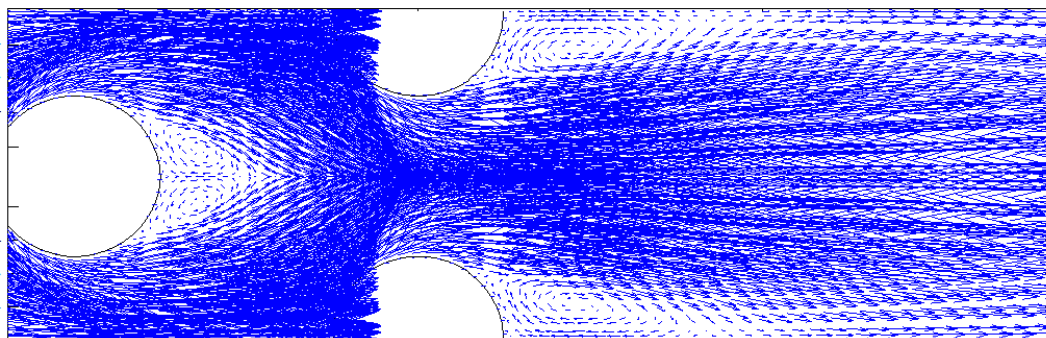
จากรูปที่ 4.21 จะเห็นว่าผลจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีค่าใกล้เคียงกับผลจากโปรแกรม Fluent โดยมีความแตกต่างมากที่สุดของความเร็ว u เท่ากับ 0.0494 m/s และมีความแตกต่างมากที่สุดของความเร็ว v เท่ากับ 0.0161m/s

4.5 ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

ปัญหาการไหลผ่าน กลุ่มทรงกระบอกจะมีการวิเคราะห์ปัญหาลักษณะเดียวกับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว แต่เมื่อรูปทรงปัญหาและเงื่อนไขขอบมีความสมมาตรเราสามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ด้วยขนาดของโดเมนที่เล็กลงตามรูปที่ 3.16(b) โดยใช้กริดจำนวน 2,069 เซลล์ ดังรูปที่ 3.17

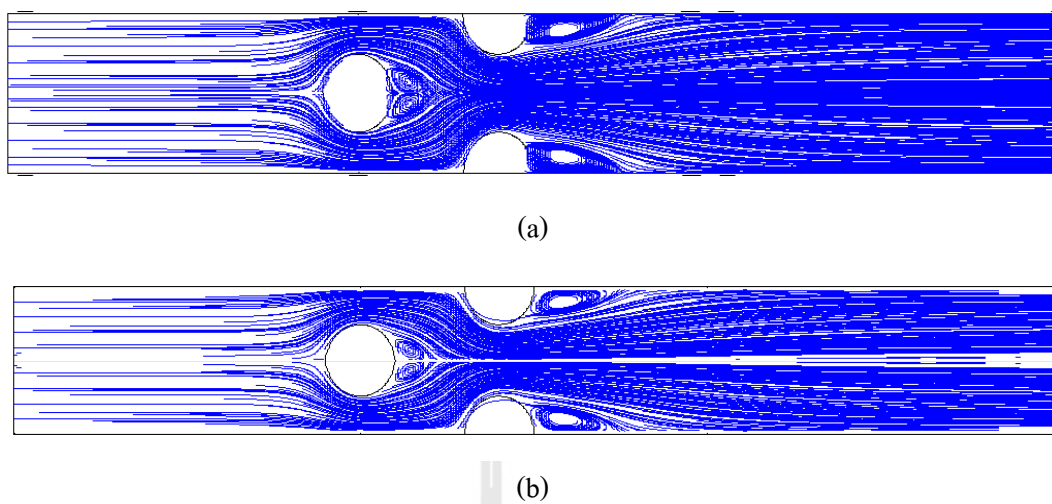
จากรูปที่ 4.22 ด้วยค่าเลขเรย์โนลด์ที่เท่ากับกับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว จะทำให้เกิดลักษณะการไหลคล้ายกัน แต่เนื่องจากทรงกระบอกอยู่ซ้อนกันทำให้การหมุนวนด้านหลังทรงกระบอกแรกมีขนาดเล็กกว่าเพราะมีผลกระทบจากการปะทะของของไหลกับด้านหน้าของทรงกระบอกถัดมา ทำให้บริเวณนั้นมีความดันสูง ดังนั้นจุดแยกตัวของทรงกระบอกแรกจึงอยู่ก่อนไปด้านหลังของทรงกระบอกแรกและเกิดการหมุนวนที่เล็กกว่าการหมุนวนด้านหลังของทรงกระบอกถัดมา

เมื่อเทียบลักษณะการไหลจากรูปที่ 4.22 และ 4.23 จะเห็นว่ามีความคล้ายคลึงกัน และเมื่อนำความเร็ว มาเปรียบ กันตาม รูปที่ 4.24 สัญลักษณ์ คือ ค่าที่ได้จากโปรแกรม Fluent ซึ่งอยู่บนเส้นกราฟของค่าจากโปรแกรมที่พัฒนาพอดี โดยมีความแตกต่างมากที่สุดของความเร็ว u เท่ากับ 0.0480 m/s และมีความแตกต่างมากที่สุดของความเร็ว v เท่ากับ 0.0189 m/s

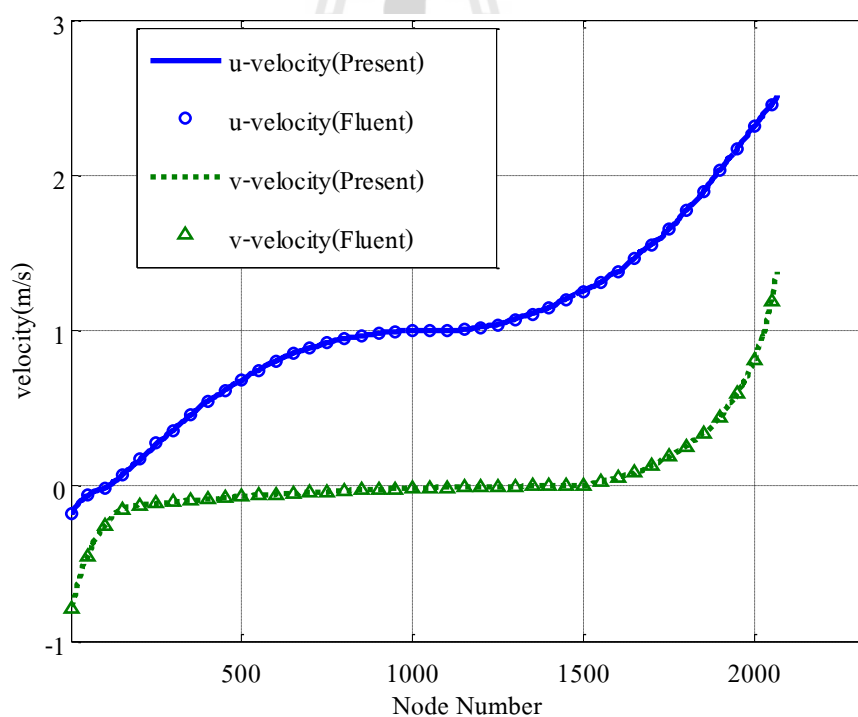


รูปที่ 4.22 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอกจาก

(a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นและ (b) Fluent



รูปที่ 4.23 เส้นการไหลของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอกจาก
(a) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นและ (b) Fluent



รูปที่ 4.24 ผลเปรียบเทียบความเร็วของการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

งานวิจัยนี้ทำการพัฒนาโปรแกรม คอมพิวเตอร์ สำหรับคำนวณปัญหาการไหลใน 2 มิติ บนพื้นฐานกริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยม การไหลที่พิจารณาเป็นแบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ สมการควบคุมการไหลคือสมการนาเวียร์ - สโตกส์ ซึ่งประกอบด้วยพจน์ การพา พจน์การแพร่ และพจน์แหล่งกำเนิด ในการประมาณค่าพจน์การแพร่ได้ใช้วิธีผลต่างกลาง และใช้วิธีผลต่างต้นลมสำหรับการประมาณค่าพจน์การพา โดยสมการนาเวียร์-สโตกส์ถูกแก้โดยใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE

โปรแกรมนี้ถูกทดสอบกับปัญหาการไหล 5 แบบ คือ

1. ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 100 400 1,000 3,200 และ 5,000
2. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 1
3. ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันที ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 40
4. ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเดี่ยว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 30
5. ปัญหาการไหลผ่านกลุ่มทรงกระบอก ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ เท่ากับ 30

ผลการคำนวณจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent จากผลการคำนวณในบทที่ 4 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับผลจากโปรแกรม Fluent ได้ผลเป็นแนวโน้มเดียวกันและมีค่าใกล้เคียงกัน

ปัญหาการไหลในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้พฤติกรรมเป็นการหมุนวนหลักในส่วนกลาง โดเมนและการหมุนวนรองที่มุมล่างของโดเมน และที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 5,000 จะเกิดการหมุนวนรองที่มุมบนซ้ายของโดเมนด้วย โดยผลการเปรียบเทียบกับค่าจากโปรแกรม Fluent ให้ค่าสอดคล้องในแนวโน้มเดียวกัน โดยมีความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น เพราะมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมที่สูงขึ้น จะเห็นได้จากการ หมุนวนหลักหมุนเข้าหาจุดกึ่งกลาง โดเมนและการแผ่กว้างของการหมุนวนรอง เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมนี้จะมีความถูกต้องน้อยลง เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมสูงขึ้นหรือมีค่าเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น

ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน เป็นการไหลอย่างง่ายที่ใช้ตรวจจับโปรไฟล์การไหลแบบเต็มขั้น ผลการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและผลจากโปรแกรม Fluent ให้ค่าที่

ใกล้เคียงกัน แต่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนมากบริเวณใกล้กับผนัง ซึ่งเป็นผลจากลักษณะของกริดที่ใช้ในการพิจารณามีลักษณะไม่เหมาะสม

ปัญหาการไหลผ่านหน้าตัดขยายทันทีแสดงพฤติกรรมการหมุนวนหลังจากหน้าตัดถูกขยาย ผลการเปรียบเทียบกับค่าจากโปรแกรม Fluent มีความสอดคล้องกับค่อนข้างดี แต่ความคลาดเคลื่อนเล็กน้อยที่บริเวณการหมุนวน

ส่วนปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก ทั้งเดี่ยวและกลุ่ม ให้พฤติกรรมคล้ายกันคือเกิดการหมุนวนด้านหลังทรงกระบอกสมมาตรบนล่าง และเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากโปรแกรม Fluent ให้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีและมีค่าใกล้เคียงกันมาก

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากข้อสรุปของงานวิจัยนี้จะเห็นว่า เมื่อเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม Fluent ที่มีการกำหนดวิธีการประมาณค่า พจน์ต่าง ๆ เหมือนกัน แต่โปรแกรมยังมีความคลาดเคลื่อน สูงสำหรับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมสูง ผลเนื่องจากการเลือกวิธีการประมาณค่าเกรเดียนต์ในแนวตั้งฉากด้านแบบ Muzafferija (1994) ที่พิจารณาเพียงผลกระทบจากการไม่ตั้งฉากของเส้นเชื่อมระหว่างโหนด โดยไม่คำนึงถึงผลที่เกิดจากจุดตัดของด้านกับเส้นเชื่อมระหว่างโหนดที่ไม่อยู่บนจุดกึ่งกลางด้าน ซึ่งจะทำให้มีความถูกต้องลดลงมากขึ้นเมื่อจุดตัดดังกล่าวห่างจากจุดกึ่งกลางด้าน โดยปัญหานี้ส่วนมากจะเกิดเมื่อใช้กริดแบบสามเหลี่ยมในการวิเคราะห์

กริดแบบสามเหลี่ยมไม่เหมาะสมสำหรับโปรแกรมนี้ คือ กริดที่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและสามเหลี่ยมมุมป้าน เพราะกริดแบบนี้จะมีเส้นเชื่อมระหว่างโหนดที่ไม่ตั้งฉากและไม่ผ่านจุดกึ่งกลางด้าน โดยจุดที่ตัดกับด้านเข้าใกล้จุดมุมมากเกินไป ส่งผลทำให้การคำนวณมีความถูกต้องน้อย

สำหรับกริดแบบสามเหลี่ยมเหมาะสมที่สุดสำหรับโปรแกรมนี้ คือ กริดที่เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า เพราะกริดแบบนี้จะมีเส้นเชื่อมระหว่างโหนดตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลางด้าน ทำให้การคำนวณมีความถูกต้องและเสถียรมากที่สุดสำหรับกริดสามเหลี่ยม

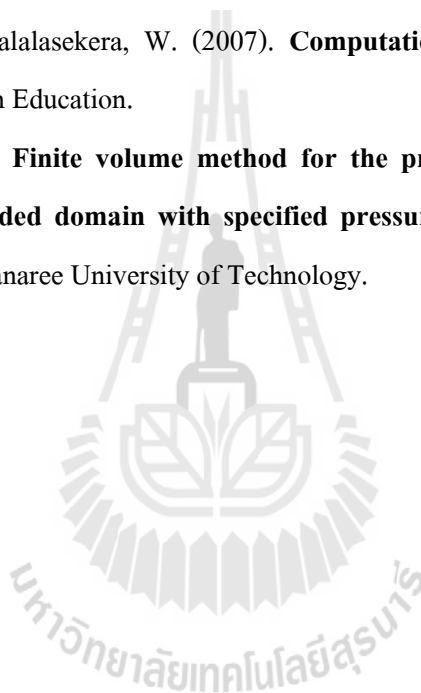
อย่างก็ตาม กริดที่ใช้กับโปรแกรมนี้ เป็นข้อมูลกริดที่ได้มาจากโปรแกรม Gambit ซึ่งกริดส่วนมากจะมีมุมภายในระหว่าง 54 ถึง 72 องศา ถึงแม้จะเป็นกริดคุณภาพสูง แต่จะมีบางครั้งขึ้นอยู่กับรูปร่างของโดเมนและการแบ่งช่วงกริด อาจทำให้มุมภายในมีขนาดไม่เป็นไปตามเกณฑ์ เป็นผลทำให้ผลการคำนวณแกว่งได้

งานวิจัยนี้สามารถนำไปปรับปรุงสำหรับปัญหาการไม่ตั้งฉากกับด้านของเส้นเชื่อมระหว่างโหนดและจุดตัดที่เกิดขึ้นไม่อยู่บนจุดกึ่งกลางด้าน ได้โดยการเลือกใช้วิธีอื่นในการประมาณค่าเกรเดียนต์ในแนวตั้งฉากด้าน เช่น วิธีของ Ferziger and Peric (2002) เป็นต้น

รายการอ้างอิง

- Beardmore, R. (2008). **Boundary Layer and Wake** [On-line]. Available: http://www.roymech.co.uk/Related/Fluids/Fluids_Drag.html
- Blazek, J. (2005). **Computer Fluid Dynamics: Principles and applications**. (2nd ed.). Britain: Elsevier.
- Boonmongkolruksa, P., and Limtrakarn, W., (2008). Air ventilation and temperature distributions in greenhouse by computational fluid dynamics. **Proceeding of 5th TRF**, Chulalongkorn University.
- Bourke, P. (1989). **Intersection point of two lines (2 dimensions)** [On-line]. Available: <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/lineline2d/>
- Ferziger, J. H., and Peric, M. (2002). **Computational methods for Fluid Dynamics**. (3rd rev. ed.). Berlin: Springer.
- Fluent Inc. (2006). **FLUENT 6.3 user's guide: B. case and data file formats** [On-line]. Available: http://hpce.iitm.ac.in/website/Manuals/Fluent_6.3/fluent6.3/help/html/ug/node1490.htm
- Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C.T. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**. 48: 387-411.
- Harlow, F. H., and Welsh, J. E. (1965). Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface. **Physics of Fluids**. 8: 2182-2189.
- Hirt, C. W., Amsden, A. A., and Cook, J. L. (1974). An arbitrary Lagrangean-Eulerian computing method for all flow speeds. **Journal of Computational Physics**. 14: 227.
- Malan P., Suluksna, K., and Juntasaro, E. (2009). Calibrating the $\gamma - Re\theta$ Transition Model for Comercial CFD. **The American Institute of Aeronautics and Astronauts**. 47: 1-14.
- Muzaferija, S. (1994). **Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach**. Ph.D. Dissertation, University of London.

- Rhie, C. M., and Chow, W. L. (1983). A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. **The American Institute of Aeronautics and Astronauts**. 21: 1525-1532.
- Stone, H. L. (1968). Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial differential equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. 5: 530-558.
- Suluksna, K., Juntasaro, E., and Dhechaumphai, P., (2008). Correlations for modelling transition boundary layers under influences of freestream turbulence and pressure gradient. **Proceeding of 5th TRF**, Chulalongkorn University.
- Versteeg, H. K., and Malalasekera, W. (2007). **Computational Fluid Dynamics**. (2nd ed.). Glasgow: Pearson Education.
- Yambangwai, D. (2008). **Finite volume method for the prediction of incompressible flow through a bounded domain with specified pressure as boundary condition**. Ph.D. Dissertation, Suranaree University of Technology.



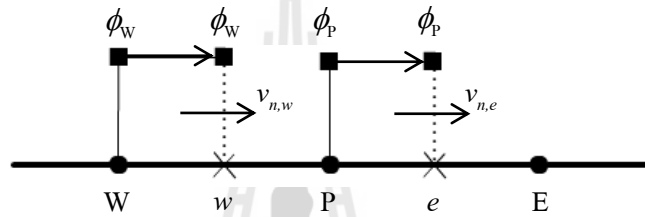


ภาคผนวก ก

คำอธิบายและการคำนวณเพิ่มเติม

ก.1 การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างต้นลม

วิธีผลต่างต้นลม เป็นการประมาณค่าคุณสมบัติบนแต่ละด้านของเซลล์ (ϕ_i) ซึ่งพิจารณาจากทิศทางการไหลผ่าน ด้านนั้น ๆ ($v_{n,i}$) โดยถ้าการไหลที่ด้านพุ่งออกจากเซลล์ ค่าคุณสมบัติที่ด้านนั้นจะเท่ากับค่าที่เซลล์นั้น แต่เมื่อการไหลที่ด้านพุ่งเข้าหาเซลล์ ค่าคุณสมบัติที่ด้านนั้นจะเท่ากับค่าที่เซลล์ของเซลล์ด้านนอกที่ติดกับเซลล์นั้น ดังสมการที่ (3.26) หลักการการประมาณค่าของวิธีนี้สามารถอธิบายได้จากตัวอย่างปัญหา 1 มิติ ตามรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1 การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างต้นลม

จากรูปที่ ก.1 เมื่อความเร็วที่ด้าน w ของเซลล์ P มีทิศทางจากเซลล์ W เข้าหาเซลล์ P ดังนั้นคุณสมบัติที่เซลล์ W จะถูกพามาที่ด้าน w การประมาณค่าด้วยวิธีนี้จึงให้ค่าคุณสมบัติที่ด้าน w (ϕ_w) เท่ากับค่าคุณสมบัติที่เซลล์ W (ϕ_W) เมื่อความเร็วที่ด้าน e ของเซลล์ P มีทิศทางออกจากเซลล์ P ไปหาเซลล์ E ดังรูปที่ ก.1 ดังนั้นคุณสมบัติที่เซลล์ P จะถูกพามาที่ด้าน e ทำให้ค่าคุณสมบัติที่ด้าน e (ϕ_e) ถูกประมาณให้เท่ากับค่าคุณสมบัติที่เซลล์ P (ϕ_P)

ด้วยหลักการประมาณค่าดังกล่าวทำให้ค่าที่ได้จากวิธีผลต่างต้นลมให้อันดับความแม่นยำในการประมาณเพียงอันดับที่หนึ่ง แต่วิธีนี้ให้เสถียรภาพในการคำนวณสูงกว่าวิธีอื่น เช่น วิธีผลต่างกลาง เป็นต้น จึงเหมาะสำหรับพจน์ที่มีการเคลื่อนที่อย่างพจน์การพา

ผลการประมาณค่าจากรูปที่ ก.1 สามารถประยุกต์เข้ากับ สมการที่ (3.28) โดยพิจารณาเพียง 1 มิติ ดังนั้นจะไม่มีผลของการเยื้องของกริด ($\sum S_{d-cross,i} = 0$) และไม่พิจารณาพจน์แหล่งกำเนิด จะได้สมการดังนี้

$$\dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_e \phi_e = D_w \phi_W + D_e \phi_E - (D_w + D_e) \phi_P \quad (ก.1)$$

จากรูปที่ ก.1 ได้ $\phi_w = \phi_W$ และ $\phi_e = \phi_P$ นำมาแทนในสมการที่ (ก.1) ได้ดังนี้

$$(D_w + D_e + \dot{m}_e)\phi_P = (D_w - \dot{m}_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (\text{ก.2})$$

$$(D_w + D_e + \dot{m}_e + \Delta\dot{m} - \Delta\dot{m})\phi_P = (D_w - \dot{m}_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (\text{ก.3})$$

เมื่อ $\Delta\dot{m} = \dot{m}_w + \dot{m}_e \approx 0$ ดังนั้นจะได้

$$(D_w + D_e + \cancel{\dot{m}_e} + (\cancel{\dot{m}_w + \dot{m}_e}) - (\dot{m}_w + \cancel{\dot{m}_e}))\phi_P = (D_w - \dot{m}_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (\text{ก.4})$$

$$(D_w + D_e - \dot{m}_w)\phi_P = (D_w - \dot{m}_w)\phi_W + D_e\phi_E \quad (\text{ก.5})$$

เมื่อเขียนสมการที่ (ก.5) ให้อยู่ในรูปทั่วไปจะได้

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \quad (\text{ก.6})$$

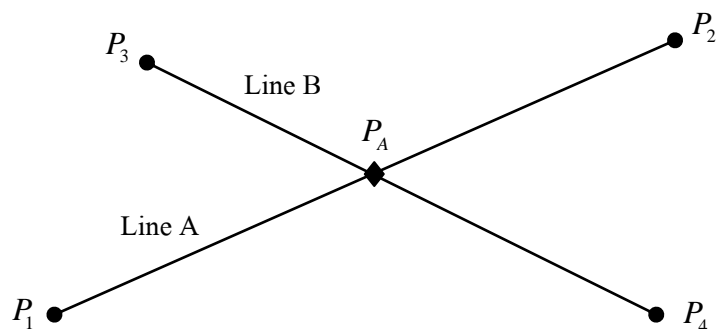
เมื่อ $a_W = D_w + \max(0, -\dot{m}_w)$

$$a_E = D_e + \max(0, -\dot{m}_e)$$

$$a_P = a_W + a_E$$

จะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์เกี่ยวข้องกับฟลักซ์ของการแพร่ (D_i) และฟลักซ์ของการพาในรูปของอัตราการไหล (\dot{m}_i) ซึ่งฟลักซ์ของการแพร่จะส่งผลเสมอในทุกสัมประสิทธิ์ ส่วนฟลักซ์ของการพาจะมีผลเมื่อการไหลเข้ามาในเซลล์ P หรือ มีทิศทางการไหลตรงข้ามกับเวกเตอร์ ตั้งฉากด้านที่พุ่งออก (\hat{n}_i) เท่านั้น จึงจะทำให้อัตราการไหลเป็นค่าลบ และมีผลกับค่าสัมประสิทธิ์นั้น ๆ

ก.2 การหาจุดตัดบนเส้นตรง



รูปที่ ก.2 ตัวอย่างการหาจุดบนเส้นตรง

จากรูปที่ ก.2 เส้นตรง A และ B ตัดกันที่จุด P_A สามารถหาเวกเตอร์บอกทิศทางได้โดยการเอาจุดต้นทางไปลบจุดปลายทาง ดังสมการ

$$\vec{R}_{12} = P_2 - P_1 \quad (\text{ก.7})$$

$$\vec{R}_{34} = P_4 - P_3 \quad (\text{ก.8})$$

$$\vec{R}_{1A} = P_A - P_1 \quad (\text{ก.9})$$

$$\vec{R}_{3A} = P_A - P_3 \quad (\text{ก.10})$$

เมื่อ P_1, P_2 = พิกัดจุด 1 และ 2 ตามลำดับ

P_3, P_4 = พิกัดจุด 1 และ 2 ตามลำดับ

P_A = พิกัดจุด A

เวกเตอร์ \vec{R}_{12} และ \vec{R}_{1A} มีทิศทางเดียวกันแต่นำต่างกัน จึงปรับค่าด้วยสัมประสิทธิ์เพื่อให้ได้ค่าเท่ากันและสามารถหาค่าที่จุดตัดได้ ตามสมการที่ (ก.11)

$$P_A = P_1 + u_A (P_2 - P_1) \quad (\text{ก.11})$$

จากสมการที่ (ก.11) มีตัวแปร มากกว่า 1 ตัว ดังนั้นจะต้องใช้สมการจากเส้นตรง B ตามสมการที่ (ก.12) ด้วย

$$P_B = P_3 + u_B (P_4 - P_3) \quad (\text{ก.12})$$

เมื่อจุด P_A คือจุดเดียวกัน จะได้ว่าสมการที่ (ก.11) = (ก.12)

$$x_1 + u_A (x_2 - x_1) = x_3 + u_B (x_4 - x_3) \quad (\text{ก.13})$$

$$y_1 + u_A (y_2 - y_1) = y_3 + u_B (y_4 - y_3) \quad (\text{ก.14})$$

จากนั้นแก้สมการหาค่า u_A, u_B ได้ดังนี้

$$u_A = \frac{(x_4 - x_3)(y_1 - y_3) - (y_4 - y_3)(x_1 - x_3)}{(y_4 - y_3)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1)} \quad (\text{ก.15})$$

$$u_B = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_1 - x_3)}{(y_4 - y_3)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)(y_2 - y_1)} \quad (\text{ก.16})$$

เมื่อได้ u_A, u_B แล้วแทนค่าลงในสมการที่ (ก.11) หรือ (ก.12) หาค่าพิกัดที่จุดตัด x_A, y_A ตามสมการนี้

$$x_A = x_1 + u_A (x_2 - x_1) \quad (\text{ก.17})$$

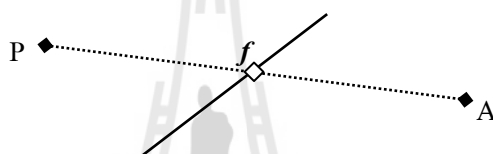
$$y_A = y_1 + u_A (y_2 - y_1) \quad (\text{ก.18})$$

ข้อสังเกตจากการคำนวณ

1. ส่วนของสมการที่ (ก.15) และ (ก.16) จะเท่ากันเสมอ
2. ถ้าส่วนของสมการที่ (ก.15) และ (ก.16) เท่ากับ 0 หมายความว่า เส้นตรง 2 เส้นนี้ขนานกัน
3. ถ้าทั้งเศษและส่วนของสมการที่ (ก.15) และ (ก.16) เท่ากับ 0 หมายความว่า เส้นตรง 2 เส้นนี้ทับกัน

ก.3 การหาค่าสัมประสิทธิ์การประมาณค่าที่ด้าน (Interpolation Factor)

การหาค่าสัมประสิทธิ์การประมาณค่าที่ด้าน (α_R) เป็นสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการประมาณค่าจากค่าที่โหนดมาที่ด้านของเซลล์นั้น ๆ โดยอาศัยหลักการถ่วงน้ำหนัก จากรูปที่ ก.3 สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การประมาณค่าที่ด้านได้ดังนี้



รูปที่ ก.3 ตัวอย่างการหาค่าสัมประสิทธิ์การประมาณค่าที่ด้าน

$$\alpha_R = \frac{L_{Pf}}{L_{PA}} \quad (\text{ก.19})$$

เมื่อ $L_{Pf} = \sqrt{(x_f - x_P)^2 + (y_f - y_P)^2}$ = ระยะจากโหนด P ถึงด้าน f

$L_{PA} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2}$ = ระยะจากโหนด P ถึงโหนด A

ก.4 การหาค่าที่ด้าน

การประมาณค่าที่โหนดมาเป็นค่าที่ด้าน ใช้ในหลายขั้นตอนการคำนวณ เช่น การหาค่าที่อัตราการไหล การหาค่าเกรเดียนต์ เป็นต้น ซึ่งสามารถได้จากสมการเดียวกันดังต่อไปนี้

$$\phi_f = \alpha_R \phi_P + (1 - \alpha_R) \phi_A \quad (\text{ก.20})$$

เมื่อ ϕ_f = ค่าที่ด้านที่ต้องการหา

ϕ_P, ϕ_A = ค่าที่โหนด P และ A



ภาคผนวก ข

บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์
เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

รายชื่อบทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

Chunso, N., Angskun, T., and Suluksna, K. (2011). **Development of Computer Program for Two-Dimensional Complex Geometry Flows**. The 2nd-TSME International Conference on Mechanical Engineering 19-21 October 2011, Krabi, Thailand.





Development of Computer Program for Two-Dimensional Complex Geometry Flows

Natta Chunso^{*1}, Thara_Angskun², and Keerati Suluksna¹

¹ Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Suranaree University of Technology,
Nakhon Ratchasima, Thailand 30000

² Department of Information Technology, Faculty of Social Technology, Suranaree University of Technology,
Nakhon Ratchasima, Thailand 30000

* Corresponding Author: Tel. 044-224410, Fax: 044-224613,
E-mail: ahaaa_natta@hotmail.com

Abstract

This research proposes a CFD computer program for simulating the two-dimensional steady laminar flow based on finite volume method and triangular unstructured mesh. The numerical algorithm is developed based on SIMPLE algorithm for solving the Navier-Stokes equations, which are consisted of momentum equations and continuity equation in form of the pressure correction equation. The strategies of CDS and UDS schemes are respectively used to discretise the convection and diffusion terms of those governing equations. A lid driven cavity flow with Reynolds number of 100, 400, 1000, 3200 and 5000 is investigated to validate the developed computer program. The predicted results show that the in-house computer program gives good results compared with the reference data.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Finite Volume Method, Triangular Unstructured Mesh, Cell-Centered Grid

1. Introduction

Flow phenomena play an important role in many engineering applications such as flow around the vehicles, the ventilation of air inside the buildings. An understanding in their behaviors makes the engineers to optimize in designing the systems. Unfortunately, the governing equation of flow is controlled by a very complex form of the Navier-Stokes equations that are impossible to completely solve by using any analytical methods to obtain an exact solution. As a result, the numerical method called CFD (Computational Fluid

Dynamics) is taken into account for solving the flow problems by providing an approximation solution rather than those of using analytical method for the exact solution. Based on CFD concept, the flow domain will be divided into a finite number of the control volumes (CVs). The flow equations are then applied to all those CVs with the specified numerical schemes and hence a system of the algebraic equations is obtained. This can be solved numerically by means of computer programming. Generally, the technique of discretisation which is typically used in CFD process is the finite volume method (FVM). This



method is usually found as a strategy-based in developing of various popular CFD commercial software such as FLUENT, CFX, STAR CMM+, etc. Another shortcoming in solving the flow is the complexity of the domain shape which is usually found in many flow applications. With the complex geometry, it is very difficult or impossible to discretise such domain with using of regular mesh. As a result, the use of unstructured grid technique seems to be a suitable one of the choice here to overcome the problem. Due to the irregular shape of the unstructured mesh, however, the special treatments will be included in the solving process.

In the presented work, the numerical strategies and methodologies which are used to develop the computer program are described. The two-dimensional steady and incompressible flow is considered. The Navier-Stokes equations are discretised based on FVM and unstructured mesh. A technique of auxiliary node is adopted here to provide the orthogonal between the node-node connecting lines and the cell faces at the mid-face locations. The advantages of this technique are omitting of a cross diffusion term in the discretised equations resulting from the non-orthogonally effect and also the second order accuracy of the cell faces gradient calculation is preserved. The developed computer program has been validated with the driven cavity flow with Reynolds Number of 100, 400, 1000, 3200, and 5000, respectively. The predicted results have been taken to compare with the numerical results predicted by FLUENT software. It is found that the presented results give good agreement with those reference data.

2. The Numerical Strategies

For the two-dimensional flow under the conditions of steady state and incompressible, the flow equations are governed by the momentum equations and the continuity equation. Those can be written in general form of the transport equation as follow:

$$\text{div}(\rho \vec{V} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}(\phi)) + S_s \quad (1)$$

Where ρ denote the fluid density, \vec{V} the velocity vector, ϕ the flow variable, Γ the diffusion coefficient, and S_s the source/sink term.

2.1 Finite Volume Method (FVM)

FVM is the discretisation technique for transforming the governing equation in PDE form to be the equation in algebraic form. This method takes integration of the governing equation over each control volumes and then considers the balancing of the fluxes through the surfaces of the control volumes as followed:

$$\begin{aligned} \int_{CV} \text{div}(\rho \vec{V} \phi) d\Omega \\ = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) d\Omega + \int_{CV} S_s d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

Where $d\Omega$ is the control volume. The volume integral (Eq. (2)) will be transformed to be

surface integral by using Gauss's theorem.

$$\begin{aligned} \int_S \rho \vec{V} \phi dS \\ = \int_S \Gamma \text{grad} \phi dS + \int_{CV} S_s d\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

For the control volume with n faces, the Eq. (3) can be written as the summation of the properties for all those surfaces as follow:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{all surface}} \rho \vec{V} \phi A_f \\ = \sum_{\text{all surface}} \Gamma \text{grad} \phi A_f + S_s \Omega \end{aligned} \quad (4)$$



All terms in Eq. (4) will be implemented with the specified numerical schemes in order to discretise those terms to be the algebraic equation.

2.2 Discretisation of the Diffusion Term

From Eq. (4), the diffusion term has been approximated by using the central differencing scheme (CDS). However, the second order accuracy of this scheme will be provided only if it is treated in the direction of normal-to-surface. As a result, the normal gradient calculation is taken in to account for approximating as follow:

$$\sum_{\text{all surface}} \Gamma(\hat{n}_i \cdot \text{grad}\phi) A_i = \sum_{\text{all surface}} \Gamma A_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i \quad (5)$$

From Fig. 1, it can be seen that the connected line between the centered nodes P and A is crossed the cell face line at point i. It is not lay through the mid-face location, point i'. This condition leading to a degrading of the accuracy in computation the gradient at the CVs surface and also produces instability in the calculation as well.

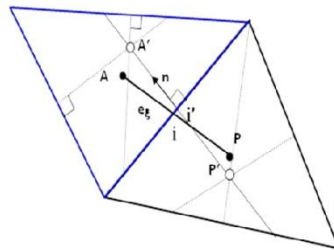


Fig. 1 Construction of the auxiliary nodes

To overcome this shortcoming, the technique of auxiliary node is adopted here. The auxiliary nodes P' and A' can be easily constructed by drawing the three straight lines

normally from the mid-faces inward the cell volume. The intersection between those lines is the location where the auxiliary node is placed. However, the technique of auxiliary node tend to fail if the twist angle of the connected line P-A with respect to the cell face is larger. This angle depends on the shape of the triangular cell. As a result, it is necessary to control the angles inside the triangular cell not exceed the range of 54-72 degree.

2.3 Discretisation of the Convection Term

Physically, the convection term is directly related to the mass flux through the cell face. To obtain the mass fluxes at each cell faces, the normal velocity at the cell face must be found. In the presented work, the technique of the so-called Rhie-Chow interpolation is adopted to apply for those normal velocities at cell faces:

$$v_f = \bar{v}_f - \left(\frac{\Delta \Omega_f}{a_p} \right)_i \left(\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{i'} - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{i'}^{\text{old}} \right) \quad (7)$$

Obviously, it can be seen that the Rhie-Chow interpolation is formulated in terms of the pressure gradient in normal direction ($\partial p / \partial n$), the average value of the velocity at cell face, the average value of the cell volume and the central coefficient which is obtained from the discretised momentum equations.

2.4 Computation Procedures

The SIMPLE algorithm of Patankar and Spalding (1972) is employed to solve these flow equations here. The calculation procedure is started with initializing the field variables with a small value except for the pressure that is initiated with zero. To initiate the SIMPLE calculation process a pressure field is guessed



and employed to sequentially solve the momentum equation to yield the velocity field. The velocity field is used to determine the mass fluxes through each cell face and subjected to the constraint that it must satisfy the continuity equation. In this step, the Rhie-Chow interpolation is used to determine the mass fluxes. The pressure-correction equation is performed by using the mass imbalance arising from the incorrect velocity field as the source term so that the pressure-correction field can be obtained at all nodes. Once the pressure-correction field is known, the correct pressure and velocity fields can be obtained by updating them with the pressure correction.

During the SIMPLE iteration, the discretised equation is numerically solved by using the point relaxation of Gauss-Siedel method. The number of sweep for each equation solved should not be the same. Only one sweep is sufficient for momentum but for pressure the 5 sweeps are required. All variables will be weighted with the appropriate values of under-relaxation factor to avoid the solution wiggle, in this work the value of 0.2 is used to stabilize all variables except for pressure the value of 0.01 is used. The algorithm for the simulation can be summarized as follows:

- (1) Initialize the velocity and pressure fields.
- (2) Solve the momentum equations to yield velocity fields.
- (3) Solve the pressure correction equation to yield pressure correction field.
- (4) Correct the pressure and velocity by the pressure correction.

- (5) Repeat steps (2)-(4) until the solution converges.

3. Computational Strategies

In this work, the developed computer program has been validated with the driven cavity flow. This flow is usually found as the simple problem for validating the computer code. The flow domain is constructed by a $1 \times 1 \text{ m}^2$ square geometry as shown in Fig. 2. All boundaries are walls. The top wall is moved from left to right with the speed of 1 m/s and the rest walls are fixed. The cavity is full filled with the specified fluid. The fluid property is specified corresponding to the Reynolds number requirement.

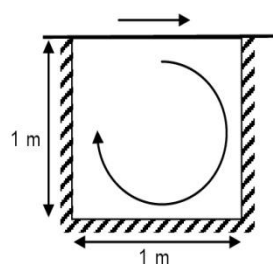


Fig. 2 Domain of a square cavity flow

The considered domain described above has been generated by using Gambit software. The domain has been discretised to the finite number of control volumes based on triangular unstructured mesh. In the process, each edges of the domain are divided with the number of 20 and the 902 CVs are obtained as shown in Fig. 3.

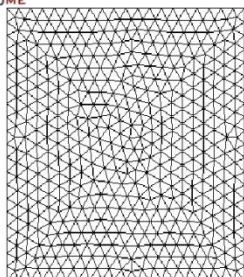


Fig. 3 Mesh configuration

4. Results and Discussion

Determine the fixed-length velocity vectors of the flow with $Re=1000$ as shown in Fig. 4. It can be seen that the fluid in the upper zone of the cavity is forced to drive from left to right due to the shear driven effect of the lid. The flow comes down in the right zone and then goes up in the left zone like the circulation. In the figure, there are two patterns of the circulations in the flow field, the primary and secondary circulations. The primary circulation moves around the cavity core with the vertex center of (0.62, 0.65). The secondary circulations with a smaller size are appears at the two bottom corners of the cavity.

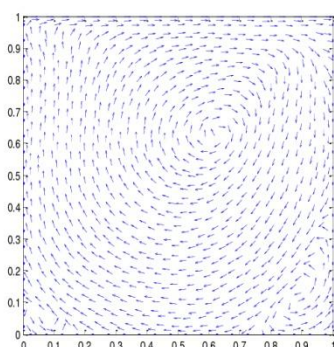


Fig. 4 Velocity vector of $Re=1000$

Figs. 5-9 display comparison of velocity on vertices from the presented work and Fluent software that the upper is a comparison of x-

velocity and the lower is a comparison of y-velocity. The dashed-lines represent the presented results, and the solid lines come from Fluent. The presented results are satisfactory with Fluent software.

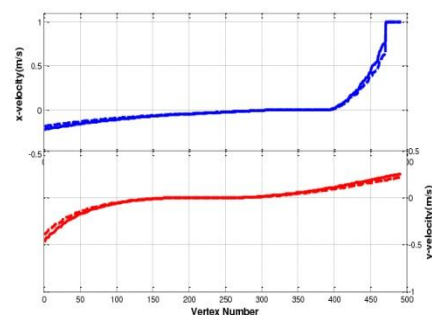


Fig. 5 Comparison of velocity at $Re100$

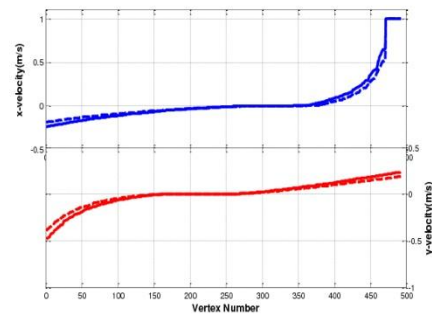


Fig. 6 Comparison of velocity at $Re 400$

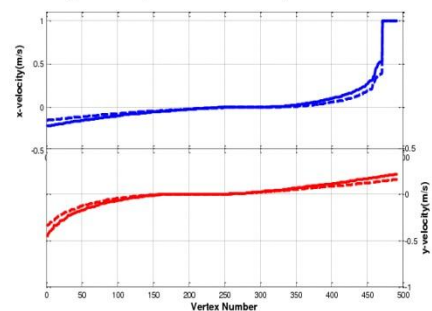


Fig. 7 Comparison of velocity at $Re 1000$

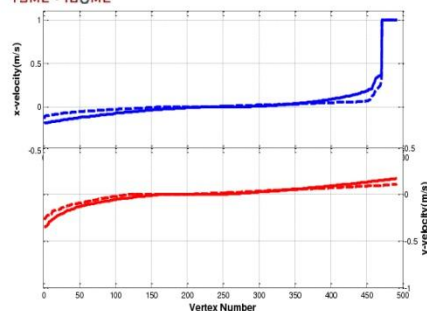


Fig. 8 Comparison of velocity at Re 3200

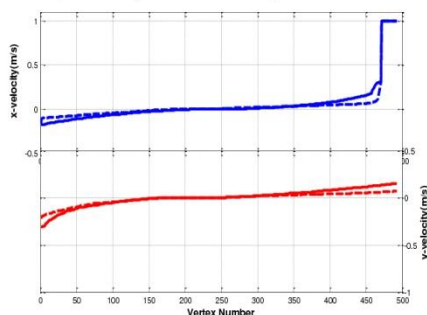


Fig. 9 Comparison of velocity at Re 5000

5. Conclusion

The research work presents the CFD in-house software. The software is developed for the two-dimensional steady state and incompressible flow. The numerical technique of FVM and triangular unstructured mesh are implemented. The upwind differencing scheme is employed to approximate the convection and diffusion terms. The Rhie-Chow interpolation is used to calculate the mass fluxes throughout the cell faces. The shear driven cavity flow is used as a valuable tool for validating the developed software. The results shown that the developed software gives the satisfactory results compared with Fluent.

6. Acknowledgement

Authors would like to be grateful to the School of Mechanical Engineering, Suranaree University of Technology and National Metal and

Material Technology Center (MTEC) for the research grant supporting.

7. Annotation

7.1 Symbols

A	area of face
a_p	cofactor of node P
e	unit vector of node P to A
n_i	outward unit normal vector of face
p	pressure
u	x-velocity
v	y-velocity
\vec{V}	velocity vector
V_f	normal face velocity
μ	viscosity
Ω	volume
ρ	density

7.2 Subscript

f	considering on face
-----	---------------------

8. References

- [1] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, and C.T.(1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics*, vol. 48, 1982, pp. 387-411.
- [2] J. H. Ferziger, M. Peric (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edition, Springer.
- [3] Suhas V. Patankar (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Taylor&Francis Publishers.
- [4] J. Blazek (2005), *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, 2nd edition, Elsevier Publisher.
- [5] H. K. Versteeg, W. Malalasekera (2007), *An Introduction Fluid Dynamics The Finite Volume Method*, 2nd ed., Pearson Prentice Hall.



TSF16
The Second TSME International Conference on Mechanical Engineering
19-21 October, 2011, Krabi

[6] Damrongsak Yambangwai, Finite Volume
Method For The Prediction Of Incompressible
Flow Through A Bounded Domain With
Specified Pressure As Boundary Condition,
Suranaree University of Technology, Thesis
Report (2008).

ประวัติผู้เขียน

นางสาวณัฏฐา จันโส เกิดเมื่อวันที่ 5 เมษายน 2528 ที่อำเภอภูเขียว จังหวัดชัยภูมิ จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่โรงเรียนอนุบาลยะลา จังหวัดยะลา จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่โรงเรียนภูเขียว จังหวัดชัยภูมิ และสำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตร บัณฑิต สาขา วิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา เมื่อ พ.ศ. 2552 และได้เข้าศึกษาต่อในระดับวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ขณะศึกษาได้เป็นผู้สอนปฏิบัติการของสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จำนวน 3 รายวิชา ได้แก่ (1) ปฏิบัติการวิศวกรรมเครื่องกล (2) วิชาเขียนแบบวิศวกรรม และ (3) โปรแกรมเมทแลบสำหรับวิศวกรรมเครื่องกล

ในระหว่างศึกษาได้มีการนำเสนอผลงานวิชาการเรื่อง **Development of Computer Program for Two-Dimensional Complex Geometry Flows** ในการประชุมนานาชาติ สมาคมวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 2 (TSME International Conference on Mechanical Engineering) ที่โรงแรมเชอราตันกระบี่ บีชีริสอร์ท จังหวัดกระบี่ ระหว่างวันที่ 19-21 ตุลาคม พ.ศ. 2554 โดยมีรายละเอียดปรากฏในภาคผนวก ข.